REDIMAT
Journal of Research in Mathematics Education

Hipatia Press
www.hipatiapress.com

Volume 7, Number 2

Hipatia Press
www.hipatiapress.com

Editorial

Articles

Reviews

REDIMAT, Vol. 7 No. 2 June 2018 pp. 107-110

Editorial

Javier Díez-Palomar[1]

1) Universidad de Barcelona. España.

Date of publication: June 24th, 2018
Edition period: June 2018-October 2018

To cite this article: Díez-Palomar, J. (2018). Editorial. *REDIMAT*, *Vol 7*(2), 107-110. doi: 10.4471/redimat.2018.3591

To link this article: http://dx.doi.org/10.4471/redimat.2018.3591

REDIMAT, Vol. 7 No. 2 June 2018 pp. 107-110

Editorial

Javier Díez-Palomar
Universidad de Barcelona

Me es grato presentar un nuevo número de la revista de investigación en didáctica de las matemáticas REDIMAT. En este número los lectores y las lectoras van a encontrar cuatro artículos que muestran el potencial de tres enfoques didácticos diferentes para desarrollar la competencia de análisis didáctico. Ser capaz de *analizar* lo que sucede en el aula cuando un/a estudiante está resolviendo una tarea, y *comprender* a través de la observación de su trabajo y de la lectura de sus respuestas, es una competencia esencial que todo maestro y toda maestra tiene que ser capaz de desarrollar. Pero no es tarea fácil. La intuición y el sentido común pueden ser compañeros ocasionales, pero no nos aseguran de ningún modo que nuestro análisis sea correcto y ajustado a los procesos cognitivos, afectivos, interaccionales, etc., que se producen en cada situación de aula que estemos observando. Disponer de un marco de análisis bien fundamentado, validado, con una teoría sólida detrás, nos puede ofrecer una cierta garantía de usar evidencias científicas, más que ocurrencias, sobre las que basar nuestra actuación. Por eso, disponer de artículos como los que se incluyen aquí, en este número de REDIMAT, suponen *food for the mind*, material de reflexión para mejorar nuestra práctica docente.

En el primer artículo Pablo Beltrán-Pellicer y Belén Giacomone utilizan el enfoque ontosemiótico para analizar y discutir la idoneidad didáctica de un curso de postgrado. La herramienta de análisis denominada como idoneidad didáctica (Breda, Font & Pino-Fan, 2018) es un constructo teórico que se ha mostrado efectivo en investigaciones anteriores para desarrollar la competencia de análisis didáctico. Las seis facetas que contempla esta herramienta permiten al maestro o a la maestra focalizar su mirada analítica sobre el contenido matemático, sobre las interacciones que se producen cuando los estudiantes están resolviendo las tareas matemáticas, sobre las estrategias cognitivas que despliegan al hacerlo, o incluso sobre el impacto que tiene el contexto que circunda tanto la práctica como a las personas que participan en dicha práctica. Los autores concluyen su discusión con una reflexión sobre la idoneidad del propio dispositivo, como herramienta válida para el propósito de desarrollo de la competencia de análisis didáctico. Las personas participantes en el estudio se muestran por un lado muy positivas sobre la capacidad del constructo de la idoneidad didáctica como herramienta para analizar aspectos cognitivos y efectivos de la práctica. La faceta mediacional también arroja resultados interesantes que permiten percatarse de la importancia de una buena secuenciación de las tareas, con tiempo suficiente para que los estudiantes sean capaces de poder resolverlas. Pero, por otro lado, los autores también señalan la necesidad de una formación profesional de calidad, sobre el uso de la herramienta, puesto que se trata de un constructo con una profunda base teórica, que de acuerdo con los autores, es aconsejable conocer a fin de poder extraer todo el potencial del dispositivo.

En el segundo de los artículos que se incluyen en este número de REDIMAT las autoras se plantean un estudio sobre la introducción de la geometría sintética en la formación inicial del profesorado de matemáticas. Para ello adoptan otro de los enfoques conocidos en el ámbito del desarrollo profesional docente: el modelo del MKT (conocimiento matemático para la enseñanza), desarrollado en la línea de los trabajos iniciales de Shulman (1987), que después siguieron, entre otras personas, Deborah Ball y su equipo (Hill, Ball & Schilling, 2008). Este enfoque de la formación del profesorado de matemáticas contempla dos esferas relacionadas, pero con entidad propia: el conocimiento matemático y el conocimiento profesional para la enseñanza. La persona que enseñe matemáticas, tiene que ser competente en ambos aspectos, tanto en matemática, como en su didáctica. A partir de esta distinción básica, el modelo se enriquece más con componentes más específicos, tales como el conocimiento común del contenido, el conocimiento en el horizonte matemático, el conocimiento especializado del contenido, el conocimiento del contenido y de los alumnos, el conocimiento del contenido y del currículum, o el conocimiento del contenido y de la enseñanza. Son todos ellos dominios o subdominios que, en conjunto, sirven para caracterizar con detalle el MKT. Las autoras del artículo, usan este enfoque para hacer un análisis detallado de los componentes que aparecen en las clases observadas. Es un trabajo inspirador, y que seguramente generará discusión que permitirá avanzar en el análisis de la práctica docente.

El tercer artículo que incluimos en este número de REDIMAT, también se centra en el enfoque del MKT. En este caso, el contexto es un curso de enseñanza de álgebra para futuros/as maestros/as, en Turquía. Los dos autores se basan en el modelo conceptual de Ferrini-Mundy y colaboradores (Ferrini-Mundy et al, 2003, 2005, 2006), sobre los dominios implícitos en la enseñanza del álgebra. Partiendo de aquí, el objetivo del estudio que presentan es determinar el conocimiento del contenido de álgebra en la formación inicial del profesorado de matemáticas. La comparación de los resultados que obtienen los/as participantes en el estudio respecto del conocimiento del contenido del álgebra y del conocimiento pedagógico del mismo es reveladora, y abre la discusión a las interconexiones entre ambos sub-dominios del MKT y sus consecuencias en términos de competencia didáctica.

Finalmente, en el último de los artículos las autoras nos cambian de escenario, y nos conducen al ámbito del cálculo. Silva y Almedia nos presentan un interesante trabajo de investigación fundamentado en la teoría semiótica desarrollada por Peirce. A través del análisis de los signos y de sus significados, las dos autoras reflexionan sobre cómo los y las estudiantes construyen su comprensión de las funciones exponenciales. A través de un contexto de modelización presentado en dos actividades diferentes realizadas con estudiantes en cuarto año del grado de Matemáticas, ambas autoras concluyen que la familiaridad con la tarea constituye un elemento esencial en el proceso cognitivo de construcción de significado de los objetos matemáticos. El proceso que analizan corresponde, en buena medida, con el modelo ofrecido por Blum (2015) sobre *modeling schema*. De acuerdo con Blum, la modelización parte de una situación o de un fenómeno estudiado. De ahí el o la estudiante construye un modelo de la situación como primer paso para comprender el fenómeno estudiado, pero de ahí ya se pasa a una matematización (*mathematical model*) a partir de cuyo análisis se pueden establecer desviaciones (o no) del modelo, que se manifiestan cuando el o la estudiante realiza la interpretación para obtener el resultado a la tarea propuesta originalmente. Silva y Almeida en el análisis de sus datos han encontrado puntos de conexión que confirman la aproximación de Blum. Pero dejo les/as dejo para que prosigan con su interpretación. Sin más, y esperando que estos cuatro artículo sean igual de gratos para ustedes que para mí, dejo paso a su lectura.

Referencias

Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*: Intellectual and Attitudinal Changes (pp. 73–96). New York: Springer.

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for research in mathematics education*, 372-400. Doi: https://www.jstor.org/stable/40539304

Breda, A., Font, V., & Pino-Fan, L. R. (2018). Evaluative and normative criteria in Didactics of Mathematics: the case of didactical suitability construct. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *32*(60), 255-278.

Ferrini-Mundy, J., Burrill, G., Floden, R., & Sandow, D. (2003). *Teacher knowledge for teaching school algebra: Challenges in developing an analytical framework*. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, Chicago, IL.

Ferrini-Mundy, J., Floden, R., McCrory, R., Burrill, G., & Sandow, D. (2005). *A conceptual framework for knowledge for teaching school algebra*. East Lansing, MI: Authors.

Ferrini-Mundy, J., McCrory, R., & Senk, S. (2006). *Knowledge of algebra for teaching: Framework, item development and pilot results.* Research symposium at the research pre-session of NCTM annual meeting. St. Louis, MO.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard educational review*, *57*(1), 1-23. Doi: 10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411

REDIMAT
Journal of Research in Mathematics Education

Hipatia Press
www.hipatiapress.com

Instructions for authors, subscriptions and further details:

http://redimat.hipatiapress.com

Desarrollando la Competencia de Análisis y Valoración de la Idoneidad Didáctica en un Curso de Postgrado Mediante la Discusión de una Experiencia de Enseñanza

Pablo Beltrán-Pellicer[1], Belén Giacomone[2]

1) Universidad de Zaragoza. España
2) Universidad de Granada. España

Date of publication: Junio 24th, 2018
Edition period: Junio 2018-Octubre 2018

To cite this article: Beltrán-Pellicer, P., y Giacomone, B. (2018). Desarrollando la competencia de análisis y valoración de al idoneidad didáctica en un curso de postgrado mediante la discusión de una experiencia de enseñanza. *REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education*, *7*(2), 111-133. doi: 10.4471/redimat.2018.2516

To link this article: http://dx.doi.org/10.4471/redimat.2018.2516

REDIMAT, Vol. 7 No. 2 Junio 2018 pp. 111-133

Developing the Competence of Didactic Suitability Analysis and Assessment in a Postgraduate Course through the Discussion about the Suitability of a Teaching Experience

Pablo Beltrán-Pellicer
Universidad de Zaragoza

Belén Giacomone
Universidad de Granada

(*Received: 20 January 2017; Accepted: 22 April 2018;Published: 24 June 2018)*

Abstract

This paper describes the design, implementation, and evaluation of a formative intervention in a virtual postgraduate course on Mathematics Education, aimed to the professional development of both teachers and researchers. The objective is to introduce the participants to the developing of reflective practice competence, applying the notion of didactical suitability as a theoretical and methodological framework. The research methodology is qualitative, exploratory, and interpretative. The results show the categories arising from the analysis of the collected data, among which should be remarked the importance of being able to reflect in a professional way and the fact of being competent on the use of frameworks which guide and support it.

Keywords: didactic-mathematical reflection, instructional design, didactical suitability.

2018 Hipatia Press
ISSN: 2014-3621
DOI: 10.4471/redimat.2018.2516

Hipatia Press
www.hipatiapress.com

REDIMAT, Vol. 7 No. 2 Junio 2018 pp. 111-133

Desarrollando la Competencia de Análisis y Valoración de la Idoneidad Didáctica en un Curso de Postgrado Mediante la Discusión de una Experiencia de Enseñanza

Pablo Beltrán-Pellicer
Universidad de Zaragoza

Belén Giacomone
Universidad de Granada

(*Recibido: 20 Enero 2017; Aceptado: 22 Abril 2018;Publicado: 24 Junio 2018)*

Resumen

En este artículo se describe el diseño, implementación y evaluación de una intervención formativa en un curso virtual de posgrado de Didáctica de la Matemática orientado al desarrollo profesional de investigadores y profesores. El objetivo del diseño es iniciar a los participantes en el desarrollo de la competencia de reflexión sobre la práctica docente, aplicando la noción de idoneidad didáctica como herramienta teórica y metodológica. La metodología de investigación es cualitativa, exploratoria e interpretativa. Los resultados destacan la importancia de reflexionar de manera profesional y el hecho de ser competente en el uso de herramientas que la faciliten.

Palabras clave: reflexión didáctico-matemática, diseño instruccional, idoneidad didáctica.

2018 Hipatia Press
ISSN: 2014-3621
DOI: 10.4471/redimat.2018.2516

En el marco del enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007), se ha propuesto un modelo de categorías de los conocimientos didácticos-matemáticos del profesor de matemáticas (Pino-Fan y Godino, 2015) y también se ha abordado la descripción de las competencias profesionales del profesor de matemáticas, ligándolas básicamente con el conocimiento y uso competente de herramientas teóricas y metodológicas que permitan describir, explicar y valorar los procesos de instrucción de matemáticas (Breda, Pino-Fan y Font, 2017; Godino, Batanero, Font y Giacomone, 2016; Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017).

La noción de idoneidad didáctica es una de las herramientas del EOS que, cuando es aplicada por profesores en ejercicio, promueve una actitud reflexiva orientada hacia la mejora de la práctica docente. Por otro lado, al proporcionar una guía metodológica sobre la que articular esa reflexión, las conclusiones pueden compartirse en el seno de equipos de trabajo, lo que permite identificar los aspectos clave de cada una de las facetas de un proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. El dominio de esta herramienta por parte de profesores, formadores o investigadores está asociado a lo que Godino et al. (2016) consideran como *competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica*, esto es, la competencia para la reflexión global sobre la práctica didáctica, su valoración y mejora progresiva.

Desde esta perspectiva ontosemiótica se vienen realizando numerosos aportes a nivel internacional (Breda, Font y Lima, 2015) en los cuales se manifiesta que el constructo de idoneidad didáctica presenta un gran potencial para el desarrollo profesional del profesor de matemáticas. Diferentes autores (Breda, Pino-Fan y Font, 2017; Seckel y Font, 2015) destacan la importancia de utilizar pautas específicas que apoyen la planificación de acciones didácticas, que permitan mejorar resultados, y sugieren la incorporación de instrumentos de evaluación, que proporcionen información sobre el progreso de los estudiantes a través de indicadores con niveles de desempeño. Dicha sugerencia se basa en que, cuando los profesores argumentan que su propuesta didáctica representa una mejora, usan de manera implícita los criterios de idoneidad didáctica (Breda et al., 2015; Breda y Lima, 2016; Ramos y Font, 2008).

Estas acciones didácticas han sido producto de numerosas investigaciones sobre el desarrollo de la competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica (Ferreres y Vanegas, 2015; Giménez, Vanegas, Font y Ferreres, 2012; Pochulu, Font y Rodríguez, 2016; Seckel, 2016; Seckel y Font, 2015), los cuales se han centrado, sobre todo, en la formación inicial de profesores en formato presencial. En esta línea, este trabajo describe el diseño, implementación y evaluación de una intervención formativa para profesores de matemáticas, en formación inicial y continua, orientada a desarrollar la mencionada competencia aplicando la noción de idoneidad didáctica (Godino, 2013). La intervención se realiza en el contexto de un curso de posgrado de Didáctica de la Matemática, utilizando como recurso la plataforma Moodle para apoyar la interacción asincrónica entre el profesor y los estudiantes, y una videoconferencia web para hacer posible la interacción sincrónica entre los participantes localizados en distintos lugares geográficos.

Los objetivos de este trabajo son:

- Informar del diseño, implementación y evaluación de una intervención formativa para desarrollar la mencionada competencia.
- Identificar las potencialidades del dispositivo didáctico implementado, en el que se combinan interacciones asincrónicas y sincrónicas de los participantes, para explicitar, discutir y clarificar ideas sobre los factores, componentes y criterios de idoneidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Problemas de Investigación y Marco Teórico

Son abundantes los problemas con los que profesores se enfrentan en su práctica diaria, siendo algunos de ellos de naturaleza epistemológica, ecológica, cognitiva, o instruccional. Por ejemplo, la falta de tiempo para desarrollar los programas, currículos poco idóneos, enfrentarse a los fracasos escolares en relación con los conocimientos pretendidos, cómo afrontar una enseñanza por competencias, el poco tiempo y la falta de formación para incorporar recursos tecnológicos y diseñar tareas o innovar. Esto genera que el profesor necesite herramientas que le permitan reflexionar sobre sus acciones y encontrar puntos clave que le permitan afrontar los distintos problemas (Ponte, 2008, p. 154).

En el marco del EOS, se ha introducido la noción de *idoneidad didáctica* como una herramienta de apoyo para la reflexión sobre la práctica didáctica, su valoración y mejora progresiva. El profesor de matemáticas debe conocer, comprender y valorar esta herramienta y adquirir competencia para su uso pertinente. Se trata de la competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de los procesos de estudio matemáticos (Breda et al., 2017; Godino et al., 2017).

La Noción de Idoneidad Didáctica: Facetas, Componentes e Indicadores

La idoneidad se descompone en seis facetas o idoneidades parciales, las cuales han de verse de manera sistémica, ya que hay cierta interacción entre ellas. La *idoneidad epistémica* se ocupa de los significados de los objetos matemáticos *per se*, evaluando la representatividad de los significados institucionales pretendidos con relación a un significado de referencia. La influencia del entorno en el proceso de estudio se tiene en cuenta en la *idoneidad ecológica*, donde tienen cabida todas las normas, escritas y no escritas, que afectan al mismo (expectativas de las familias y de la sociedad, proyecto educativo de centro, legislación, etc.). La *idoneidad cognitiva* valora si los significados pretendidos de los objetos que se ponen en juego se encuentran en la zona de desarrollo potencial del alumnado objetivo, así como si se integran estrategias de evaluación apropiadas para alinear de forma progresiva los significados personales con los pretendidos. Muy relacionada con el dominio cognitivo, la *idoneidad afectiva* se refiere a si se consideran los intereses, emociones, actitudes y creencias de los alumnos, en el diseño e implementación del proceso de estudio. Lo que normalmente se conoce como estilo de enseñanza, queda reflejado en la *idoneidad interaccional*, que estudia los patrones de interacción y las configuraciones didácticas que tienen lugar en el aula (o en el medio sobre el que se implemente un proceso en particular). Se entenderá que existe una alta idoneidad en este sentido si las interacciones permiten identificar y resolver obstáculos de aprendizaje o conflictos semióticos. Finalmente, los recursos disponibles, tanto temporales, como humanos y tecnológicos, se evalúan en la *idoneidad mediacional*. En Godino (2013) se incluye una guía de componentes e indicadores que contribuyen a la descripción de cada idoneidad parcial y facilitan el proceso de reflexión sobre cada una de ellas.

La Idoneidad como Herramienta de Reflexión sobre la Práctica Docente

La Teoría de la Idoneidad Didáctica (TID) (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006; Godino, 2013) se incorpora de forma natural a una serie de tendencias, en el campo de la formación de profesores, que otorgan un papel fundamental a la reflexión sobre la propia práctica docente. No en vano, diversos autores la consideran una competencia clave para el profesorado (Gellert, Becerra y Chapman, 2013; Parada y Pluvinage, 2014; Pochulu et al., 2016), en aras de la mejora de la enseñanza.

La investigación-acción es una corriente pionera en este sentido. Conforma un método de investigación cualitativo en el que la atención se focaliza sobre una actividad cotidiana, siendo labor del investigador establecer sucesivos ciclos de acción y reflexión con los agentes implicados, para determinar qué cambios pueden implementarse para producir una mejora. Una línea similar es seguida por Schön (1993), quien introduce el concepto de práctico reflexivo, como la persona que "reflexiona sobre las comprensiones implícitas en la propia acción, que las hace explícitas, las critica, reestructura y aplica en la acción futura" (p. 50). Actualmente, la metodología del estudio de clases (*lesson studies*) desarrollado en Japón está recibiendo un gran interés por parte de la comunidad de investigadores (Hart, Alston y Murata, 2011). Este método hace partícipes a los profesores que imparten un mismo contenido, haciendo que se observen unos a otros y poniendo en común estas observaciones.

La sistematización de estos ciclos de reflexión es una necesidad. El establecimiento de un marco común específico para procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas facilita tanto la indagación en la propia práctica docente, permitiendo prescindir de lo accesorio e ir directamente a los aspectos significativos, como la puesta en común con otros profesionales e investigadores.

Ramos y Font (2008) analizan el papel que juegan estos criterios de idoneidad en la argumentación de los profesores cuando valoran la introducción de cambios institucionales en un proceso de instrucción dado. Como resultado general, los autores concluyen que el sistema de indicadores y componentes que ofrece la herramienta de idoneidad didáctica son útiles para el profesorado, dado que los ayuda a organizar y analizar las prácticas discursivas sobre cómo debería ser el proceso de instrucción, y más aún, los ayuda a valorar las prácticas que intervienen en la planificación, la implementación efectiva y en la evaluación del conocimiento. En esta investigación y en la de Breda (2016) se constata que los profesores usan de forma implícita los criterios de idoneidad didáctica para organizar su reflexión sin haber recibido información específica sobre este constructo teórico.

En otras investigaciones, se han diseñado dispositivos formativos en los que los profesores reciben una formación específica para el uso de los criterios de idoneidad didáctica como pauta para guiar y organizar su reflexión (Giménez et al., 2012; Seckel y Font, 2015). Bajo la misma línea de trabajo, Beltrán-Pellicer (2016) recoge los criterios generales planteados en Godino (2013), los interpreta en términos específicos respecto al tópico de la probabilidad y los utiliza para valorar el diseño y la implementación de una unidad didáctica correspondiente al azar y la probabilidad en 3º de ESO. Esta herramienta le permitió, en su rol docente, reflexionar sistemáticamente sobre cada una de las seis facetas que afectan el proceso de estudio y considerar posibles caminos para mejorar la práctica. Por otra parte, Godino, Batanero, Rivas y Arteaga (2013) usan los componentes e indicadores de idoneidad didáctica (siguiendo el modelo propuesto por el EOS) para valorar procesos de formación de profesores de matemáticas.

En este trabajo se continúa con esta mirada sobre el profesor reflexivo y se propone a los estudiantes una manera de tomar contacto inicial con estos criterios de idoneidad didáctica. A continuación, se describe el dispositivo formativo utilizado.

Método: El Dispositivo Formativo

Este estudio se enmarca en un enfoque de investigación de tipo exploratorio, dado que se recoge y analiza información a partir de un diseño piloto e interpretativa, de manera que se les da sentido a las acciones de los participantes. Se aplica el método de las investigaciones de diseño (Kelly, Lesh y Baek, 2008) en un contexto real de clase basado en el diseño, implementación y análisis retrospectivo de un primer ciclo formativo, fundamentado en las herramientas del EOS. Propio de este método de investigación, durante la experiencia se realizan micro-ciclos de reflexión sobre las estrategias e interacciones didácticas.

Contexto y Participantes

Este dispositivo fue diseñado como parte de una asignatura en un contexto de posgrado en Didáctica de la Matemática de una universidad de España. La asignatura tiene una modalidad virtual, dividida en una instancia asincrónica y otra sincrónica, donde el contacto con los participantes se genera a través de una plataforma virtual diseñada con un foro específico para cada tema discutido y una sala de videoconferencias contemplada como un espacio sincrónico con todos los participantes.

Si bien el programa oficial del máster está orientado a la formación inicial de investigadores en el área, los 34 estudiantes inscritos en este curso buscan en general herramientas que les permitan mejorar su labor docente.

El equipo de investigación está formado por un investigador-profesor quién tiene el rol de ponente o conferencista en la fase sincrónica y un investigador-observador en la misma fase. El profesor del curso es quién gestiona el foro y está familiarizado con las posibilidades y retos que plantea este tipo de recursos. Por otro lado, todos los participantes tienen un dominio de la plataforma virtual y del tipo metodología de trabajo implicada en la asignatura.

Fases del Dispositivo Formativo y Recogida de Información

El diseño del dispositivo formativo se compone de las siguientes fases:

1. Entrega y lectura de un documento que relata la aplicación de la idoneidad didáctica en una unidad didáctica de probabilidad diseñada y puesta en práctica con un grupo de alumnos de 3º ESO (14-15 años).
2. Los participantes deben escribir en el foro virtual del seminario una breve reflexión junto con preguntas para el ponente, acerca de aspectos que le suscitaron alguna duda o sobre los que quiere profundizar. Este trabajo asincrónico es individual.
3. El ponente recibe dichas preguntas una semana antes de la sesión virtual, con el objetivo de analizarlas y preparar las respuestas.
4. Sesión sincrónica de 2 horas de duración por videoconferencia. En la primera media hora, se realiza una presentación sobre el documento entregado. El resto de la sesión se dedica a comentar las dudas y

preguntas que comunicaron los participantes, en interacción dialógica con el ponente y moderada por un experto en idoneidad didáctica.

El documento entregado describe el proceso de construcción de un sistema de indicadores de idoneidad didáctica de procesos de instrucción sobre probabilidad en educación secundaria. Para ello, se particularizan y desarrollan los criterios generales de idoneidad didáctica de Godino (2013).

El proceso que se lleva a cabo parte de una revisión sistemática de los conocimientos didáctico-matemáticos de cada una de las facetas en las que se descompone el proceso de enseñanza-aprendizaje: epistémica y ecológica; cognitiva y afectiva e instruccional (interaccional y uso de medios tecnológicos). Posteriormente, se analiza una experiencia de enseñanza en torno a la unidad didáctica de probabilidad en tercer curso de Educación Secundaria Obligatoria (ESO). De esta manera, se muestra cómo la aplicación de los indicadores de idoneidad permite llevar a cabo una reflexión sistemática sobre la práctica docente, la cual puede compartirse con otros profesores.

A lo largo de las cuatro fases, se fomenta la construcción del conocimiento didáctico-matemático mediante la creación de una red de significados a partir de las interacciones entre el ponente y los participantes. Estos últimos tuvieron unas dos semanas para leer con detenimiento el artículo propuesto y para exponer sus conclusiones en el foro, las cuales no fueron moderadas en ningún momento. Es decir, los participantes tuvieron completa libertad y autonomía para expresarse.

Para el análisis de los datos se consideraron: las discusiones escritas en el foro virtual, la grabación en vídeo de la sesión sincrónica y las anotaciones de los investigadores.

Discusión de Resultados

De las evidencias que se comentan a continuación, se infiere que aquellos estudiantes que tuvieron en cuenta, de manera implícita o explícita, el sistema de indicadores y componentes son más estratégicos y competentes en las reflexiones planteadas en el foro. Este punto es clave porque “ayuda [a los estudiantes] a diseñar lentes que luego utilizarán para orientar su trabajo en forma prospectiva” (Reinholz, 2016, p. 452). Tal como sugieren Ramos y Font (2008, p. 262), los criterios de idoneidad son entendidos por los profesores como “reglas de corrección que establecen cómo ha de hacerse un proceso de instrucción”; por tanto, “se trata de realizar una acción o meta-acción, para ser más precisos (valorar), que recae sobre otras acciones (las llevadas a cabo en los procesos de instrucción)”.

El análisis cualitativo de las preguntas y reflexiones que los estudiantes plantean al ponente permitió distinguir dos grandes categorías. A continuación, se proponen ejemplos prototípicos de cada una de ellas, lo que permite mostrar el desarrollo de competencia lograda.

Primera Categoría: Acerca de Idoneidad de la Unidad Didáctica como Objeto de Estudio.

En esta categoría, se identifican cuestiones relacionadas con los criterios de idoneidad didáctica. Respecto al criterio epistémico, es decir, sobre los objetos matemáticos que se ponen en juego en la unidad didáctica, el interés de muchos estudiantes se orientó hacia su relación con el currículo oficial, en clara dependencia con la idoneidad ecológica. Ejemplo de ello son las siguientes preguntas:

> ¿Debería modificarse el currículum para recortar los conocimientos que se impartan durante un año en beneficio de que consigan una mayor idoneidad en todos los aspectos?
>
> Dentro de la descripción de la experiencia comentan la decisión departamental de anteponer el bloque de estadística y probabilidad a los de funciones y geometría. Me parece una decisión acertada … ¿por qué los libros de texto e incluso el currículo determinado por ley lo introducen siempre como el último de los bloques a impartir?

Las aportaciones de los participantes, dentro de esta interacción de lo epistémico con lo ecológico-curricular, se dirigen a lo que se conoce como “extensión del currículo”; es decir, a la cantidad y complejidad de objetos matemáticos, como a la organización del currículo en sí, donde comúnmente el bloque de probabilidad se imparte al final. De hecho, algunos de ellos reflexionan sobre cómo podría aumentarse la idoneidad cognitiva modificando el aspecto ecológico:

> En Chile al menos ocurre que por ejemplo la unidad de álgebra se debe retomar cada año para nivelar a los estudiantes con los contenidos anteriores, volviéndose insuficientes las sesiones consideradas para entregar la unidad, algo similar ocurre con la

> unidad de geometría. Entonces ¿cree que mover la cantidad de sesiones de una unidad a otra soluciona aquel inconveniente? ¿será a lo mejor necesario reajustar la cantidad de contenidos que se entregan?
> ¿Debería modificarse el currículum para recortar los conocimientos que se impartan durante un año en beneficio de que consigan una mayor idoneidad *en todos los aspectos?*

Son escasas las intervenciones acerca de lo puramente epistémico. A modo de ejemplo, nos encontramos con un participante que se interesa por el lenguaje empleado y los significados de los objetos matemáticos:

> Si creen ustedes que sería buena idea introducir los conceptos de "certeza", "azar" y "suerte" para hacer más intuitivo este primer estadio de aprendizaje además de los conceptos que mencionan de "fenómenos aleatorios y deterministas" que a priori pueden ser algo más difíciles de asimilar por los alumnos sin nociones previas.

Como si la idoneidad ecológica ejerciera de guía, se observa también que otros estudiantes la relacionan con la idoneidad mediacional, principalmente en torno a la cuestión del tiempo disponible para desarrollar la unidad.

> Además de este problema, y en relación otra vez con el tiempo, ¿creen los autores que el problema está en los planes de estudio? ¿o bien que no se especifica / reconoce oficialmente un espacio suficiente a esta rama de las matemáticas?

En este mismo sentido, también se observan inquietudes de los participantes. Por ejemplo, identifican que, efectivamente, existe un conflicto entre la idoneidad epistémica (objetos matemáticos) y la mediacional (tiempo disponible), cuyo origen parte del condicionamiento normativo que se enmarca en la idoneidad ecológica. Desde el momento en que la normativa curricular establece los contenidos para cada curso o etapa educativa, la idoneidad epistémica ha de evaluarse sobre los objetos matemáticos que, implícitamente, emergen de los sistemas de prácticas que se emplean para tratar esos contenidos. Es decir, que la correlación entre idoneidad epistémica y el aspecto curricular de la ecológica es muy alta. Ahora bien, desde la idoneidad ecológica, el marco legislativo también marca las condiciones espacio-temporales de cualquier diseño. Este conflicto queda patente con la siguiente pregunta, en la que un participante identifica estas interrelaciones y compromisos, preocupándose por la solución que, como docente, podría ofrecer:

> ¿Cómo cree usted que sería posible impartir todas las unidades, dedicándoles el tiempo suficiente para que realmente los alumnos aprendan los contenidos y alcancen los objetivos de aprendizaje?

Otros aspectos mediacionales, también condicionados por la idoneidad ecológica, son los relacionados con el absentismo, en donde las normas no tienen un origen curricular o legislativo, sino que nacen de la tradición o de las expectativas de las familias acerca de la educación:

> También, referente a la escasa productividad de las sesiones después del recreo, las continuas acciones disruptivas por parte del alumnado, el absentismo, las ratios... Me parece que es una lucha continua entre lo idóneo, el sistema político junto con los intereses políticos, sindicales, religiosos…
>
> Las irrupciones al docente que son externas al aula, la ausencia del alumnado, el tiempo en adquirir concentración, entre otros. Considero que estos son factores que en algunos casos pudieran disminuir, pero no eliminarse, por lo que pienso que siempre debieran considerarse en la planificación ¿de qué modos cree usted?

Sin embargo, otras aportaciones en torno a lo ecológico aparecen aisladas, sin ponerse en valor frente a otra idoneidad de forma explícita, como las relativas a la disrupción en el aula:

> Cuando habla de “los altos niveles de disrupción”, ¿se refiere a las interrupciones que pueda sufrir el docente debido al alumnado y su falta de atención?, ¿qué medidas paliativas creen ustedes que mejorarían este asunto?,

Un participante aprecia también una conexión entre lo mediacional (falta de tiempo) y lo cognitivo, relacionando esa aparente falta de tiempo con una maduración cognitiva desalineada con el currículo:

> ¿No cree que esta falta de tiempo está relacionada con el nulo conocimiento que tienen los alumnos de manera inicial?

Los participantes, se preguntan sobre temas curriculares: qué cambios curriculares serían idóneos para *recuperar* el valor de la probabilidad en la enseñanza. Lógicamente, estamos hablando a una escala mayor, pero sin duda, hay reflexiones a niveles menores, por ejemplo, sobre el tiempo dedicado a la instrucción de este tema, o el orden cronológico de las unidades. En este sentido, se podría pensar que “los criterios de idoneidad son herramientas que pueden ser muy útiles no sólo para organizar y analizar las prácticas discursivas del profesorado sobre cómo debería ser el proceso de instrucción, sino también para valorar las prácticas que intervienen en la determinación del significado pretendido, el implementado y el evaluado” (Ramos y Font, 2008, p. 262).

Los sistemas de creencias de los padres de los alumnos hacia la educación en general, y hacia las matemáticas y su enseñanza en particular, conforman a su vez una serie de normas no escritas que repercuten en la idoneidad ecológica. Así lo observaron los estudiantes participantes, cuando se interesaron en la necesidad de profundizar en dicho aspecto:

> El autor señala que una gran parte del alumnado asiste a clases particulares aun sin ser necesario cognitivamente. Aunque se explica que algunas familias llevan a sus hijos "porque otros lo hacen", ¿no cree que se podría ahondar más en ello para encontrar una solución?

Ya hemos señalado alguna aportación de los estudiantes en las que se reflexiona acerca de la interacción de la idoneidad cognitiva con otras idoneidades (mediacional). Sin embargo, la mayoría de las participaciones en torno al aspecto cognitivo de la experiencia presentada van dirigidas a los indicadores sobre evaluación. La siguiente observación es interesante, pues más que preguntarse por la interacción entre idoneidades, el estudiante se pregunta por el compromiso que puede darse a la hora de favorecer unas idoneidades u otras (la cognitiva, en este caso):

> Según comenta en la reflexión de la práctica docente, en la parte de idoneidad cognitiva, se han conseguido puntuaciones bajas en la prueba escrita. En este punto comenta que parte del problema pueda ser que se les da una gran importancia a dichas pruebas. ¿Cree que aplicar otro tipo de evaluación facilitaría que los alumnos adquirieran una mejor idoneidad cognitiva o piensa que es peor la falta de tiempo

El resto de las cuestiones acerca de la evaluación muestran un interés por el modo de evaluar que se siguió en la unidad didáctica, relacionadas implícitamente con el aspecto ecológico:

> ¿Por qué no se plantea un trabajo cooperativo en el aula y un cambio en el sistema de evaluación en el que la calificación no dependa (casi totalmente) de la del examen (dándole valor al trabajo por pequeños grupos)?

Muchas referencias a la idoneidad afectiva del proceso de enseñanza-aprendizaje aparecen de forma aislada, sin hacer explícita su relación con ninguna otra idoneidad:

> ¿Es realmente efectiva la metodología estudiada sin un verdadero interés en el alumno por la probabilidad?
> En este caso se ha fomentado la participación e interés del alumno introduciendo lenguaje y casos habituales y cercanos para el alumno ¿Se acercó la probabilidad al alumno con esto? ¿Es efectivo?
> Me preocupa la pérdida de autonomía y de responsabilidad que tienen los estudiantes. ¿Qué consejos puede darme para que yo, como profesora, consiga que esto no ocurra con mis alumnos

En cuanto a la idoneidad interaccional, hemos identificado un gran número de intervenciones que, implícita (al preguntarse por otras metodologías docentes), o explícitamente, se interesan por su impacto en el grado de adecuación final de la unidad didáctica:

> ¿Pueden otro tipo de metodologías cumplir los indicadores de idoneidad nombrados en el artículo?
> El mismo autor comenta que la faceta interaccional es una de las que más se ve perjudicada a la hora de realizar la implementación. ¿No sería interesante, por ejemplo, crear un foro en el que los alumnos pudiesen debatir diferentes cuestiones del tema?

De nuevo se enfatiza la necesidad de considerar cada idoneidad en interacción con las demás. Así, otro participante señala la repercusión que podrían tener otras metodologías (patrones de interacción) en otras idoneidades, como la ecológica (nuevas normas) o la afectiva (mayor interés):

> ¿Qué opina de nuevas metodologías como el flipped learning donde la docencia directa se saca del aula, para introducir en esta el trabajo sobre conceptos? ¿qué puede añadir la gamificación a los procesos interaccionales y afectivos para reducir la disrupción y mejorar el trato con el alumno?

Segunda Categoría: Acerca de la Idoneidad Didáctica como Noción Teórica y como Método

Tratamos ahora aquellas cuestiones o inquietudes de los participantes en torno a la idoneidad didáctica como un instrumento, tanto para la investigación como para la formación de profesores a través de la reflexión guiada.

En primer lugar, se observan una serie de preguntas acerca de cómo se elaboran los indicadores de idoneidad y, una vez disponibles, cómo aplicarlos a un proceso de instrucción en concreto. Se trata de la primera toma de contacto de los participantes con la idoneidad didáctica. De esta forma, varias de las cuestiones se refieren al ámbito de aplicación de los indicadores que se utilizan en la experiencia. Es decir, si son propios del curso académico en cuestión (3º ESO) o se pueden adaptar para otros:

> Me surge la duda de que si estas pautas que están adaptadas a un alumnado de 3º de ESO podrían ampliarse a otros cursos de la Educación Secundaria o incluso a Bachillerato
>
> El estudio de la probabilidad comienza en primaria, por lo que me gustaría saber si los indicadores deberían ajustarse para poder aplicarlos en este nivel.

De hecho, alguno de los participantes duda acerca de si los indicadores se mantienen a lo largo de diferentes cursos académicos, cuando en la experiencia que se les presentó estaban claramente orientados para 3º de ESO:

> ¿Para definir la idoneidad de la probabilidad, cada año debería evaluar todos los indicadores hasta que se cumpla con todos ellos o también es necesario ajustarla en ese caso?

Por otro lado, a estas dudas generales sobre el proceso de elaboración y aplicación de los indicadores, hay que añadir cuestiones concretas acerca de las decisiones de los investigadores a la hora de construirlos en la unidad didáctica que se toma como ejemplo. Así, hay un participante que se pregunta por el papel que debería jugar la evolución histórica de la teoría de la probabilidad:

> ¿Se podría añadir el significado origen de probabilidad, así como su evolución histórica para terminar de articularlo con el significado informal, subjetivo, frecuencial y clásico? ¿Podría contribuir como indicador de idoneidad?

Otra cuestión muy particular acerca de la idoneidad cognitiva, y que está relacionada con que algunos de sus indicadores se basan en los conocimientos previos de los alumnos, es la siguiente:

> En la tabla de la idoneidad cognitiva se presentan indicadores para los conocimientos previos, ¿en qué momento se definen los conocimientos previos? ¿Se busca que sean los propuestos en los indicadores para todo el proceso de aprendizaje de la probabilidad

> o en la medida que se enseña cada uno de los significados estos conocimientos previos cambian?

De la misma forma que existe cierta confusión acerca de definir los conocimientos previos para un grupo en concreto, la interacción entre idoneidades parciales del proceso de estudio, y que se comentaba para las respuestas de la primera categoría, también afecta a la interpretación de la metodología. Surge así la relación entre la idoneidad epistémica y el aspecto normativo-curricular de la idoneidad ecológica:

> Al hablar de la idoneidad epistémica y establecer un significado de referencia, Me surge la cuestión de cuál es la influencia del currículo oficial sobre éste
>
> En la reflexión aparecen dos cuestiones que en mi opinión son muy interesantes, por un lado, la evaluación en el marco LOMCE, donde el currículo aparece sumamente detallado con criterios de evaluación y estándares de aprendizaje, tiene un peso importante en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Mi cuestión es si se podría o debería plantear la inclusión de aspectos relativos a ella dentro de los indicadores de idoneidad.

También se observan sugerencias acerca de incluir aspectos no contemplados en la idoneidad afectiva, como las causas del comportamiento disruptivo de los alumnos:

> También se menciona el carácter disruptivo del alumnado, mi reflexión es que, si bien hay alumnos con los que es muy complicado lograr algo en este aspecto, el profesor en gran medida debe ser capaz de controlar estos comportamientos; por ello me cuestiono si dentro de la faceta instruccional o afectiva habría de contemplarlo al establecer indicadores de idoneidad

Precisamente, la influencia de ciertos factores externos, como la disrupción, por ejemplo, provoca la reflexión de algunos participantes acerca de la dificultad de contrastar si el diseño de la unidad fue válido o no:

> Asumo que cada uno de los componentes e indicadores son valorados durante la planificación curricular y posteriormente reflexionados a la luz de la experiencia obtenida. Sin embargo, ante una experiencia de este tipo, ¿se considera como satisfactorio el proceso de planificación, el resultado o ambas? Pues ¿Cómo saber si el diseño planteado es o no ideal cuando son factores externos los que no permiten una experiencia enriquecedora?

En este sentido, otras cuestiones incluyen este tipo de factores dentro de la idoneidad interaccional del proceso de enseñanza:

> El documento se centra más en evaluar el "grado de interacción entre los alumnos" y las define como "pocas y poco productivas". ¿Cómo se relacionan ambas afirmaciones en el concepto de idoneidad interaccional?

Una serie de preguntas se orienta específicamente acerca de la aplicación de este método, el de la idoneidad didáctica, sobre el currículo:

> ¿No cree que el concepto de idoneidad debería establecerse no sólo para evaluar la idoneidad de la práctica docente, sino también para evaluar la idoneidad del currículum?
>
> ¿Se podría llevar a cabo este planteamiento de la construcción de un sistema de indicadores de idoneidad en todas las unidades didácticas que componen un curso académico?

Al igual que sobre el currículo, otros participantes señalan el potencial de la idoneidad didáctica para mejorar los libros de texto. Cabe observar que, si el interés acerca de rediseñar o reestructurar el currículo se enmarca en el compromiso de lo epistémico con el aspecto normativo-curricular de la faceta ecológica, los libros de texto son, básicamente, un medio. Por lo tanto, este interés pone sobre la mesa la interacción de la idoneidad mediacional con la epistémica y, de forma implícita, con la ecológica, pues los libros de texto son una trasposición del currículo al aula:

> Buscando explotar el potencial de la noción de "idoneidad didáctica", ¿considera posible el extrapolar esta idea a los libros de texto escolares?

Resulta significativo un conjunto de reflexiones acerca de la implantación de este tipo de metodologías en la práctica docente. Particularmente, fueron recurrentes las cuestiones o comentarios acerca de las "lesson studies" de Japón, valorando especialmente la dificultad de implementar este tipo de metodologías en otros contextos educativos, por ejemplo, en España:

> Me ha parecido muy interesante el lesson studies en Japón, creo que es algo parecido a lo que hemos hecho en una parte del periodo de las prácticas del Máster de Educación, pero ¿cree que eso sería posible llevarlo a cabo en España? ¿Qué ocurre si tienen distinta metodología y no les gusta el de la otra persona?
>
> Me gustaría saber algo más sobre el tema de lesson studies de Japón puesto que me ha resultado bastante curioso. ¿Sería posible y

> útil implantar ese método de alguna forma en nuestro sistema educativo español?

De hecho, algunos participantes señalan de forma explícita la que, para ellos, sería la principal dificultad para poner en marcha estos métodos; mencionan la ausencia de facilidades para incluir estos análisis y reflexiones en el horario de trabajo, así como el esfuerzo que ello supone:

> ¿Cree que sería posible llevarlo a cabo en nuestro país [lesson studies], incluyéndose en las 20 horas lectivas? ¿Cómo podría organizarse el profesorado para ello?
>
> Yo realicé una vez un análisis de idoneidad y lo hice tan sólo de una clase y me llevó una cantidad de tiempo bestial, ya que lo que hice fue grabar la clase y luego analizarla escuchando lo que hacía, ¿cómo sugiere hacer el análisis de idoneidad de una unidad completa?

Para otros, la dificultad estribaría en el celo de los profesores por exponer su propia práctica docente:

> Me gustaría comentar que, en general, los profesores somos bastante celosos de la privacidad de nuestras clases, incomodándonos la presencia externa de compañeros en nuestras aulas. Sin embargo, creo que debe ser una práctica que deberíamos realizar más a menudo con la que aprender del feedback aportado por los compañeros espectadores

En cualquier caso, las respuestas reflejan la percepción, compartida por casi todos los participantes, de que la pauta de criterios, componentes e indicadores de la idoneidad didáctica es un método de reflexión que promueve la innovación docente y la mejora de la propia práctica:

> Me parece muy útil la construcción de un sistema de indicadores de idoneidad para desarrollar y trabajar una unidad didáctica, aparte que pienso que es una herramienta de ayuda y apoyo al profesor para mejorar su práctica docente
>
> Me ha parecido un documento muy interesante. En mi trabajo fin de máster, realicé una investigación similar, viendo si la experiencia que había tenido en mis prácticas docentes cumplía los requisitos de buena idoneidad didáctica, también para un curso de probabilidad en segundo de bachillerato

En alguna intervención, incluso, se percibe sorpresa de que la formación sobre este tipo de herramientas no se incluya en los cursos de profesores:

> Pero mi pregunta es, ¿quién guía realmente esas reflexiones sobre la práctica docente?, ¿quién es el encargado de que los profesores

> realmente adquieran esa competencia? Porque en mi caso, trabajo como profesora en un centro de Educación Secundaria y se supone que ya he realizado la formación oportuna para ello en el Máster de Profesorado de ESO y Bachillerato; sin embargo, no había escuchado anteriormente nada relacionado, por lo que me pregunto, ¿no deberíamos plantearnos una vez más las técnicas formativas hacia profesores?
> El trabajo de docente es un valor que se adquiere de forma progresiva, pero ¿no sería más fácil si los cimientos de dicha formación son más fuertes al comienzo?

En el máster, los estudiantes estudian diversos marcos teóricos, por lo que, de forma natural, surgen intervenciones comparando la idoneidad con dichos marcos; en particular, con el *análisis didáctico* descrito por Rico, Lupiáñez y Molina (2013):

> ¿Pero en qué se diferencian estas reflexiones de las desarrolladas en la parte del análisis didáctico correspondiente al análisis cognitivo? ¿No es el análisis didáctico al completo el que valora si ha sido o no idónea la organización, planificación y puesta en marcha de una unidad didáctica?
> La primera pregunta tiene relación con la relación entre el Análisis didáctico y los organizadores del currículum y la propuesta de TID y GVID. ¿Estas dos formas de reflexión docente son compatibles o complementarias?

Finalmente, el hecho de que se hable de "valoración" o "evaluación" de la idoneidad didáctica, parece fomentar el que los participantes vean la necesidad de traducir dicha valoración, que es cualitativa, a una medida numérica, cuantitativa:

> ¿Se ha considerado/tendría sentido considerar un instrumento o procedimiento que, partiendo de esta búsqueda, "midiese" la idoneidad didáctica, esto es, llevase a algún tipo de calificación del proceso de enseñanza-aprendizaje?
> ¿Cómo se cuantifica lo óptimo? ¿Presencia de todos los indicadores, de algunos, cumple medianamente alguno?

Reflexión Sobre la Idoneidad del Propio Dispositivo. Conclusiones

El diseño e implementación del dispositivo formativo está sujeto a un meta-análisis de su idoneidad didáctica, lo que, por otro lado, facilita la síntesis de los resultados y el establecimiento de conclusiones.

En primer lugar, consideramos la noción de idoneidad didáctica como objeto epistémico alrededor del cual gira la experiencia. La definición de idoneidad, en una primera instancia, se proporciona de manera informal, como *grado de adecuación de los procesos de enseñanza y aprendizaje*, y progresivamente se va enriqueciendo el significado del término idoneidad bajo los presupuestos del EOS. Esto último se lleva a cabo estableciendo una serie de componentes, para sentar las bases de ese grado de adecuación, teniendo en cuenta la ontología de los objetos matemáticos del EOS y los procesos que tienen lugar entre ellos. Así, las cuestiones de los participantes muestran que identifican relaciones entre dichos componentes, integrándolas en sus reflexiones, tanto de forma explícita (nombrándolas con la terminología del EOS) como implícita. Por ejemplo, se observa que se detecta una clara utilidad práctica de la idoneidad, no solamente para diseñar procesos de estudio concretos, sino para mejorar el currículo (epistémico-ecológica) o los libros de texto (epistémico-mediacional).

Ahora bien, también se han observado comentarios indicativos de concepciones distintas a las pretendidas. De esta forma, el aspecto cualitativo de la reflexión que propicia la idoneidad didáctica no termina de ser comprendido o aceptado por todos. Al utilizar el término *evaluación* de la idoneidad, varios estudiantes asociaron esta evaluación con la necesidad de una valoración cuantitativa. Por ello, concluimos que sería necesario incluir como tarea la lectura de un artículo más conceptual, donde se expliquen las bases sobre las que se ha construido la noción de idoneidad didáctica (Godino, 2013).

Desde el punto de vista cognitivo y afectivo, las participaciones en el foro y en la sesión sincrónica revelan que se trata de un tema de sumo interés. Muchos de los estudiantes señalaron de forma explícita la utilidad de este tipo de metodología para mejorar su práctica docente, así como la inexistencia de acciones formativas al respecto en los dispositivos habituales de formación permanente. Estos resultados coinciden con muchas investigaciones en el área (Pochulu et al., 2016; Ponte, 2008; Ramos y Font, 2008). En ese sentido, dispositivos como el que se ha introducido en este trabajo pueden cubrir esa carencia, asumida por los participantes, al poder ofertarse en la modalidad a distancia.

La comunicación asincrónica que ofrecen este tipo de plataformas comunicativas ayuda a lidiar con las limitaciones de programación y abre posibilidades de mejoras, por ejemplo, en los recursos diseñados (Jaworski, 2008, p. 717). Los patrones de interacción asincrónico-sincrónico se han mostrado idóneos para compartir los significados pretendidos y reflexionar sobre ellos (Gueudet, Sacristán, Soury-Lavergne y Trouche, 2012; Hjalmarson, 2015); así, los resultados indican que, en este entorno de aprendizaje, en donde los participantes tienen que escribir en un foro, la fase asincrónica les ayuda a refinar sus argumentos (Llinares y Valls, 2010. p. 193).

Por otro lado, de acuerdo con Guasch, Álvarez y Espasa (2010, p. 201) planificar en un entorno virtual no sólo requiere de una acción emprendida antes del inicio del curso, sino también de un esfuerzo concertado para la finalización con éxito del curso virtual, y sin duda, estas acciones han tenido un efecto positivo sobre las motivaciones de los participantes. Dichas interacciones han sido posibles porque el dispositivo es mediacionalmente idóneo. Es decir, tanto la división en fases del dispositivo, como los tiempos asignados a cada una de ellas y los recursos utilizados, han sido adecuados para cubrir los objetivos.

Finalmente, la reflexión sobre el aspecto ecológico del dispositivo sugiere que este tipo de acciones formativas, que fomenten el desarrollo de la competencia de reflexión para potenciar el desarrollo profesional, deberían incluirse en la jornada laboral de los docentes (Kilic, 2016; Llinares y Valls, 2010; Mellone, 2011), al igual que en países como Japón, debido al impacto que tienen en la enseñanza.

Reconocimiento

Este trabajo se desarrolla dentro del grupo «S119-Investigación en Educación Matemática» financiado por el Gobierno de Aragón y el Fondo Social Europeo.

Bibliografía

Beltrán-Pellicer, P. (2016). *Evaluación de la idoneidad didáctica de una experiencia de enseñanza del azar y probabilidad en tercer curso ESO* (Tesis de Máster). Universidad de Granada, España.

Breda, A. (2016). *Melhorias no ensino de matemática na concepção de professores que realizam o mestrado Profmat no Rio Grande do Sul: uma análise dos trabalhos de conclusão de curso*. Tesis doctoral, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Brasil.

Disponible en, http://repositorio.pucrs.br:8080/dspace/handle/10923/8858.

Breda, A., Font, V. y Lima, V. M. (2015). A noção de idoneidade didática e seu uso na formação de professores de matemática. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, *8*(2), 1-41.

Breda, A. y Lima, V. M. R. (2016). Estudio de caso sobre el análisis didáctico realizado en un trabajo final de un máster para profesores de matemáticas en servicio. *REDIMAT, 5*(1), 74-103. Doi: 10.4471/redimat.2016.1955

Breda, A., Pino-Fan, L. y Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 13*(6), 1893-1918. Doi: 10.12973/eurasia.2017.01207a

Ferreres, S. y Vanegas, Y. (2015). Uso de criterios de calidad en la reflexión sobre la práctica de los futuros profesores de secundaria de matemáticas. *Procedia-Social and Behavioral Sciences, 196*, 219-225. Doi: 10.1016/j.sbspro.2015.07.032

Gellert, U., Becerra, R. y Chapman, O. (2013). Research methods in mathematics teacher education. En K. Clements, A. Bishop, C. Keitel-Kreidt, J. Kilpatrick y F. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* vol. 27 (pp. 327-360). New York, NY: Springer-Verlag.

Giménez, J., Vanegas, Y., Font, V. y Ferreres, S. (2012). El papel del trabajo final de Máster en la formación del profesorado de Matemáticas. *UNO, 61*, 76-86.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 8*(11), 111-132.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *ZDM, 39(*1-2), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. y Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T.

Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 288-297). Málaga: SEIEM.

Godino, J. D, Batanero, C., Rivas, H. y Arteaga, P. (2013). Componentes e indicadores de idoneidad de programas de formación de profesores en didáctica de las matemáticas. *REVEMAT*, *8*(1), 46-74.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, *27*(2), 221-252.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema*, *31*(57), 90-113. Doi: 10.1590/1980-4415v31n57a05

Guasch, T., Álvarez, I. y Espasa, A. (2010). University teacher competencies in a virtual teaching/learning environment: Analysis of a teacher training experience. *Teaching and Teacher Education*, *26*(2), 199-206. Doi: 10.1016/j.tate.2009.02.018

Gueudet, G., Sacristán, A. I., Soury-Lavergne, S. y Trouche, L. (2012). Online paths in mathematics teacher training: new resources and new skills for teacher educators. *ZDM*, *44*(6), 717-731. Doi: 10.1007/s11858-012-0424-z

Hart, L., Alston, A. y Murata, A. (Eds.) (2011). *Lesson study research and practice in mathematics education.* Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Hjalmarson, M. A. (2015). Learning to teach mathematics specialists in a synchronous online course: a self-study. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1-21. doi: 10.1007/s10857-015-9323-x

Jaworski, B. (2008). Building and sustaining inquiry communities in mathematics teaching development. En K. Krainer y T. Woods (Eds.), *Participants in mathematics teachers education* (Vol. 3, pp. 309-330). Rotterdam/Taipei: Sense Publishers.

Kelly, A. E., Lesh, R. A. y Baek, J. Y. (2008). *Handbook of design research methods in education. Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching* (560s). New York: Routledge.

Kilic, H. (2016). Pre-service Mathematics Teachers' Noticing Skills and Scaffolding Practices. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1-24. Doi: 10.1007/s10763-016-9784-0

Llinares, S. y Valls, J. (2010). Prospective primary mathematics teachers' learning from on-line discussions in a virtual video-based environment. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *13*(2), 177-196. Doi: 10.1007/s10857-009-9133-0

Mellone, M. (2011). The influence of theoretical tools on teachers' orientation to notice and classroom practice: a case study. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *14*(4), 269-284. Doi: 10.1007/s10857-011-9176-x

Parada, S. y Pluvinage, F. (2014). Reflexiones de profesores de matemáticas sobre aspectos relacionados con su pensamiento didáctico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17*(1), 83-113.

Pino-Fan, L. R. y Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma, 36*(1), 87-109.

Pochulu, M., Font, V. y Rodríguez, M. (2016). Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *19*(1), 71-98.

Ponte, J. P. (2008). Investigar a nossa própria prática: uma estratégia de formação e de construção do conhecimento profissional. *PNA*, *2*(4), 153-180.

Ramos, A. B. y Font, V. (2008). Criterios de idoneidad y valoración de cambios en el proceso de instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *11*(2), 233-265.

Reinholz, D. L. (2016). Developing mathematical practices through reflection cycles. *Mathematics Education Research Journal*, *28*(3), 441-455. Doi: 10.1007/s13394-016-0175-1

Rico, L., Lupiáñez, J.L. y Molina, M. (2013). *Análisis didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular*. Granada: Comares.

Schön, D. A. (1993). The reflective practitioner: How professionals think in action. New York, NY: Basic Books.

Seckel, M. J. (2016). *Competencia en análisis didáctico en la formación inicial de profesores de educación general básica con mención en* *matemática*. Tesis doctoral. Universitat de Barcelona, Barcelona, España.

Seckel, M.J. y Font, V. (2015). Competencia de reflexión en la formación inicial de profesores de matemática en Chile. *Praxis Educacional, 11*(19), 55-75.

Pablo Beltrán-Pellicer es profesor asociado de didáctica de las matemáticas, de la Universidad de Zaragoza, España.

Belén Giacomone es profesora asociada de didáctica de las matemáticas, de la Universidad de Granada, España.

Dirección de contacto: La correspondencia directa sobre este artículo debe enviarse al autor. Dirección Postal: Facultad de Educación, Despacho D2.580. Universidad de Zaragoza. C/ Pedro Cerbuna, 12, 50009 Zaragoza (Spain). **Email:** pbeltran@unizar.es

Instructions for authors, subscriptions and further details:

http://redimat.hipatiapress.com

Enseñanza de Geometría Sintética a Futuros Profesores. El caso de la Universidad Nacional de Rosario

Lucía Inés Schaefer[1], Natalia Fátima Sgreccia[1]

1) Universidad Nacional de Rosario. Argentina

Date of publication: Junio 24th, 2018
Edition period: Junio 2018-Octubre 2018

To cite this article: Schaefer, L.I., & Sgreccia, N.F. (2018). Enseñanza de geometría sintética a futuros profesores. El caso de la Universidad Nacional de Rosario. *REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education*, *7*(2), 134-161. doi: 10.4471/redimat.2018.2559

To link this article: http://dx.doi.org/10.4471/redimat.2018.2559

REDIMAT, Vol. 7 No. 2 Junio 2018 pp. 134-161

Teaching of Synthetic Geometry to Future Teachers. The case of the National University of Rosario

Lucía Inés Schaefer
Universidad Nacional de Rosario

Natalia Fátima Sgreccia
Universidad Nacional de Rosario

(*Received: 10 February 2017; Accepted: 22 April 2018;Published: 24 June 2018)*

Abstract

The general aim of this article is to know about the promotion of knowledge building related to Synthetic Geometry in the initial training of teachers in Mathematics. It is expected to identify, describe and come up with the teaching practices carried out in the first year of the Mathematics Teacher Training career in the National University of Rosario (Argentina). The mathematical knowledge for teaching (MKT) of the Michigan group is taken as a reference. The research has a qualitative approach and is empirical, in its natural context and with descriptive scope. The categories of analysis correspond to the six sub-domains of the MKT. Among the data gathering techniques is the observation of classes and for the data processing the content analysis is applied, starting on the recognition of regularities in registers. Among the main findings is the importance given by the teacher to the students' building of concepts using different strategies. It is concluded that although the teacher makes an approach to the school version of contents, it is not explicitly done to the teachers-to-be.

Keywords: teacher training – MKT – synthetic geometry

2018 Hipatia Press
ISSN: 2014-3621
DOI: 10.4471/redimat.2018.2559

REDIMAT, Vol. 7 No. 2 Junio 2018 pp. 134-161

Enseñanza de Geometría Sintética a Futuros Profesores. El caso de la Universidad Nacional de Rosario

Lucía Inés Schaefer
Universidad Nacional de Rosario

Natalia Fátima Sgreccia
Universidad Nacional de Rosario

(*Recibido: 10 Febrero 2017; Aceptado: 22 Abril 2018;Publicado: 24 Junio 2018)*

Resumen

El presente artículo tiene como objetivo general conocer acerca de la promoción de construcción de conocimientos relativos a Geometría Sintética en la formación inicial de profesores en Matemática. Se espera identificar, describir y conceptualizar las prácticas de enseñanza llevadas a cabo en el primer año del Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional de Rosario (Argentina). Se toma como referencia el *conocimiento matemático para la enseñanza* (MKT) del grupo Michigan. La investigación tiene un enfoque cualitativo y es de tipo empírica, en su contexto natural y con alcance descriptivo. Las categorías de análisis se corresponden con los seis subdominios del MKT. Entre las técnicas de recolección de información se encuentra la observación de clases y para su procesamiento se aplica el análisis de contenido, a partir de reconocer regularidades en los registros. Entre los principales hallazgos se encuentra la importancia otorgada por el docente a la construcción de los conceptos por parte de los estudiantes utilizando distintas estrategias. Se concluye que si bien el docente realiza un acercamiento a la versión escolar de los contenidos, no lo hace de forma explícita a los futuros profesores.

Palabras clave: formación de profesores - MKT - geometría sintética

2018 Hipatia Press
ISSN: 2014-3621
DOI: 10.4471/redimat.2018.2559

El presente artículo se enmarca en un plan de investigación denominado “La Geometría Sintética en la Formación del Profesor en Matemática: el caso de la Universidad Nacional de Rosario”, correspondiente a una Beca de Estímulo a las Vocaciones Científicas, otorgada por el Consejo Interuniversitario Nacional (Argentina) durante septiembre 2015-2016, cuyo propósito general es conocer acerca de las prácticas de enseñanza para la construcción de conocimientos de Geometría Sintética en la formación inicial de profesores en Matemática. Toma como caso a la carrera Profesorado en Matemática (PM) de la Universidad Nacional de Rosario.

Como referentes teórico-metodológicos se adoptan los modelos propuestos por los equipos liderados por Deborah Ball de la Universidad de Michigan (Estados Unidos) y por César Coll de la Universidad de Barcelona (España). El primero refiere al *conocimiento matemático para la enseñanza* (MKT) y comprende seis subdominios de conocimiento que un profesor en Matemática debería poseer: común del contenido, en el horizonte matemático, especializado del contenido, del contenido y de los alumnos, del contenido y de la enseñanza, del contenido y del currículum.

En segundo término, del *estudio de mecanismos de influencia educativa* se considera especialmente lo relativo a la detección de configuraciones de mensajes en sesiones de clase.

Entre los objetivos específicos se destaca identificar, describir y conceptualizar las prácticas de enseñanza de Geometría Sintética desarrolladas en el primer año de la carrera, y caracterizar las acciones docentes que promueven u obstaculizan las oportunidades de aprendizaje de contenidos geométricos. También se espera reconocer los modos de activación de los dominios del MKT en el desarrollo de las clases y en el material de estudio, identificar momentos fértiles de vigilancia epistémica en la formación de profesores, así como explorar los puntos de vista de docentes y estudiantes acerca de propuestas didácticas alternativas para el abordaje de algunos contenidos de Geometría Sintética.

Gutiérrez (2010) señala que en la actual escuela secundaria la Geometría Sintética está escasamente desarrollada y muchas veces se olvida cómo tratarse durante la formación de profesores. Lo primero imposibilita a los estudiantes conocer otro modo de pensar; respecto a lo segundo, el tipo de experiencias formativas por las cuales transita un futuro profesor es determinante para su desempeño profesional (Ministerio de Educación, 2010). La investigación sobre el conocimiento de los profesores en Matemática ha surgido en las últimas tres décadas (Ball, 1988; Barrantes y Blanco, 2005), acompañados por una preocupación pública y política como medio para mejorar la enseñanza (Borba, 2006; García, 2005; Gascón, 2002). Poco se sabe acerca de los conocimientos matemáticos para la enseñanza, con importante vacancia en la Geometría Sintética (Sgreccia y Massa, 2012).

La Geometría Sintética se reconoce como uno de los componentes más importantes del currículum escolar de Matemática (Atiyah, 2001). Las razones para su inclusión son múltiples: promover la percepción espacial, la intuición y la visualización, estimular la creatividad, desarrollar habilidades como conjeturar, razonar deductivamente y argumentar de manera lógica en demostraciones, modelizaciones y resolución de problemas. Por otro lado, en los núcleos temáticos básicos a desarrollar en los Profesorados en Matemática Universitarios de Argentina (Consejo Interuniversitario Nacional, 2013), se distingue al área Geometría como ejemplo paradigmático para la enseñanza de una teoría axiomático-deductiva y se subraya su potencial para el desarrollo de la intuición, inducción, visualización, percepción de relaciones, regularidades y propiedades. En particular, la Geometría Sintética es la base estructural de toda una rama dentro de la Matemática y del pensamiento matemático mismo.

Las conjeturas iniciales que orientan este trabajo de investigación son dos: la versión de la Geometría Sintética estudiada en el Profesorado en Matemática dista considerablemente de una versión escolar relativamente propicia de procesos constructivos en la escuela secundaria; y el conocimiento especializado del contenido de Geometría Sintética, requerido para la enseñanza, queda relegado a la construcción, individual y sin vigilancia epistémica, del estudiante. Para fundamentar o rechazar estas conjeturas, se procedió al análisis de relatos de observaciones, a la aplicación de cuestionarios a los alumnos y al análisis del apunte de la asignatura. En esta ocasión se presentan los hallazgos relativos a la primera actividad señalada.

Algunos Estudios Relacionados

En torno a los trabajos realizados por Ball, surgen distintas investigaciones con el objetivo de describir de manera profunda el conocimiento que necesita un profesor. Santana y Climent (2015) cuestionan la poca claridad en los límites del *conocimiento común del contenido* propuesto por el grupo de Michigan, y presentan nuevos subdominios dentro del *conocimiento especializado del contenido*. Basan su estudio en el análisis de clases donde se trabaja con software matemático, para lo cual determinan algunos indicadores agrupados por bloques. De la misma manera, Escudero, Carrillo y Flores (2015) buscan superar algunas dificultades por ellos identificadas en el trabajo del equipo estadounidense y presentan el modelo del *conocimiento especializado del profesor en matemática* (MTSK), en el cual confluyen distintos conocimientos matemáticos y didácticos, y las concepciones y creencias del docente. También ofrecen un ejemplo de cómo analizar las clases "desempaquetando" las acciones docentes desde los lineamientos del modelo presentado.

En cuanto al análisis de subdominios particulares del MKT, De Gamboa, Badillo y Ribeiro (2015) se centran en el *conocimiento en el horizonte matemático* (HCK), considerando que el mismo refiere al conocimiento del profesor que da forma y permite conectar otros tipos de conocimiento en la práctica. Sostienen que debe ser estudiado tanto desde la perspectiva de la matemática como desde la pedagogía y el currículo. En su investigación, analizan y ejemplifican diversas situaciones, lo que colabora con la comprensión del subdominio mencionado. Otros autores, como Sgreccia y Massa (2012), estudian temas específicos de geometría utilizando el *conocimiento especializado del contenido* como herramienta para el análisis. En particular, en el trabajado señalado se busca conocer acerca de la competencia espacial y de la didáctica de la geometría 3d en la formación de profesores. A partir de cuestionarios abiertos aplicados a estudiantes avanzados y egresados recientes, concluyen sobre la importancia de que todo profesor tenga en mente posibles orientaciones para las dificultades de los alumnos, destacando esto como un componente fundamental en el conocimiento para la enseñanza de la matemática. Godino, Gonzato, Contreras, Estepa y Díaz-Batanero (2016) también abarcan las habilidades espaciales de futuros maestros en España y concluyen sobre la imperiosa necesidad de poner mayor énfasis en los temas de didáctica de la matemática y de proporcionar una mejor cobertura de los temas de las matemáticas escolares en la formación de los docentes.

Así como Escudero et al. (2015) consideran las concepciones y creencias como un componente importante del conocimiento del profesor, Barrantes y Blanco (2005) también lo hacen y analizan cómo estas concepciones implícitas originadas en la propia escolaridad del docente influyen en la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría. Señalan una disociación entre dos culturas diferentes: la clásica que vivieron como alumnos y la actual. Por esta razón, revaloran la formación inicial de los profesores como punto clave donde abordar los recuerdos y expectativas de los mismos. Yang (2012) también trabaja sobre esta temática y destaca la importancia de detectar las creencias y actitudes hacia la disciplina en la formación inicial, para poder redireccionar aquellas negativas y mejorar la futura práctica docente. Además, Taylan y Da Ponte (2016) destacan que si en esta formación inicial de profesores participan docentes que recorren distintos roles (maestro, investigador, formador), se obtienen ideas relativas a desarrollar el conocimiento necesario para la enseñanza y analizarlo, con el fin de facilitar el aprendizaje de los futuros profesores. En su artículo estudian cómo se transforma el conocimiento pedagógico del contenido (PCK) de los formadores, propuesto por Shulman, a partir de la interacción con estudiantes y su posterior reflexión.

Las investigaciones reportadas aportan a la comprensión del modelo del MKT y ofrecen herramientas útiles para el análisis de las clases observadas. Por otro lado, autores como Corica y Marin (2014) y Acosta, Mejía y Rodríguez (2013) proponen una estructura distinta para las clases, basada en la noción de *actividades de estudio e investigación* (en el marco de la Teoría Antropológica de Chevallard) en las cuales los alumnos, guiados por el profesor, estudian y reconstruyen alguna *organización matemática*. En ella se prioriza la construcción de los conceptos por parte de los estudiantes a partir de una situación inicial. Esto proporciona aspectos a tener en cuenta en la elaboración de una propuesta didáctica para la enseñanza de la Geometría, a partir del análisis realizado.

Encuadre Teórico

En 1983, Shulman trata en una de sus conferencias “el paradigma perdido” de la investigación de la enseñanza y el contenido del profesor, otorgando con ello especial atención al rol del contenido de una disciplina en su enseñanza. Propone un dominio especial del conocimiento del profesor, denominado *conocimiento pedagógico del contenido*, y lo caracteriza como un puente entre el conocimiento del contenido y de la práctica de la enseñanza. De esta manera, abre una importante rama de investigación seguida por numerosos autores.

Ball, Thames y Phelps (2008) presentan una teoría basada en la práctica, la del MKT, considerado como el conocimiento matemático necesario para llevar a cabo el trabajo de la enseñanza de esta disciplina. A partir del análisis de clases grabadas de Educación Primaria en Estados Unidos, concluyen que el conocimiento matemático necesario para la enseñanza es multidimensional y que requiere el detalle en numerosos aspectos innecesarios para cualquiera otra área. Es decir, un docente debe conocer más y de manera diferente la matemática.

Los autores resaltan que su punto de análisis no es lo que los docentes necesitan enseñarles a sus alumnos, sino qué es lo que los docentes deben conocer para sostener tal enseñanza. Ofrecen un camino adicional para construir el puente mencionado por Shulman, incluyendo las habilidades y los hábitos de razonamiento al conocimiento necesario por los profesores. Sostienen como hipótesis que es posible reconocer subdominios (los cuatro que se presentan a continuación), tanto en el conocimiento de la disciplina (los dos primeros) como en el conocimiento pedagógico del contenido (los dos últimos).

- Conocimiento común del contenido (CCK): es el conocimiento matemático y las habilidades que pueden ser utilizadas en un marco distinto al de la enseñanza, es decir, por cualquier persona que haya estudiado matemática. Los profesores deben ser capaces de resolver todo aquello que le plantean a sus alumnos, de detectar cuándo algo no es correcto, de utilizar la notación adecuada. Los autores destacan, además, que con "común" no refieren a que todos cuentan con este conocimiento sino que puede ser utilizado en distintos ámbitos, no necesariamente vinculados con la enseñanza.
- Conocimiento especializado del contenido (SCK): es el conocimiento matemático propio de la enseñanza, es decir, que no es necesario en otros ámbitos distintos a este. El docente debe comprender distintas interpretaciones de un mismo concepto, dado que la enseñanza de la disciplina implica volver visibles y enseñables determinadas características del contenido para los alumnos. La diferencia con el CCK es que este refiere al conocimiento puesto en juego al resolver un problema, tanto por un matemático como por cualquier otro sujeto que esté capacitado, mientras que el SCK atiende a ordenar

las secuencias con que podrían desarrollarse distintos aspectos de un contenido específico.

- Conocimiento del contenido y de los alumnos (KCS): es el conocimiento que combina el saber sobre los alumnos y el saber sobre la matemática. El docente debe poder anticipar qué pensarán sus alumnos, qué dificultades tendrán, qué encontrarán interesante y qué no, así como escuchar e interpretar las ideas y pensamientos incompletos de los estudiantes.
- Conocimiento del contenido y de la enseñanza (KCT): combina el conocimiento sobre la enseñanza y el conocimiento de la matemática. El docente debe conocer cuestiones para el diseño y planificación de las clases, la secuenciación de contenidos, la identificación de métodos y procedimientos adecuados para cada situación. En una clase el docente debe decidir cuándo aprovechar las ideas de los alumnos, cuándo efectuar nuevas preguntas o cuándo realizar una pausa para aclarar algo.

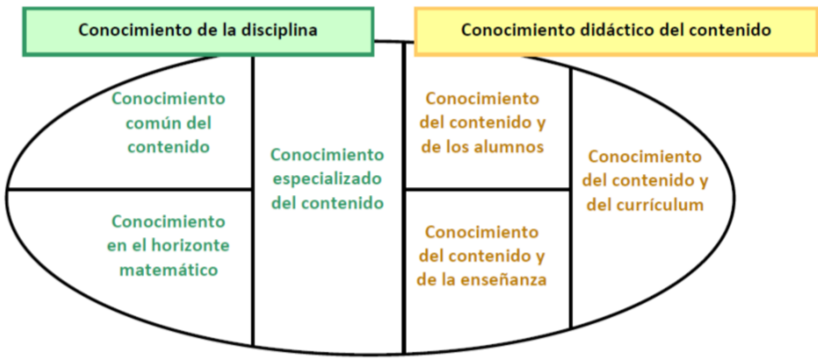

Figura 1. Dominios y subdominios del MKT

Para visualizar estas ideas, los autores proponen el diagrama de la Fig. 1, en el cual se observa cómo el conocimiento del currículum propuesto por Shulman es colocado dentro del conocimiento pedagógico del contenido. Sin embargo afirman no estar seguros si podría ser parte del KCT o si podría ser transversal a varias categorías. Además incluyen una tercera categoría en el conocimiento de la disciplina a la cual denominan *conocimiento en el horizonte matemático* (HCK), que incluye la capacidad de realizar conexiones con contenidos matemáticos futuros y de tomar decisiones sobre cómo tratar ciertos temas en cada situación. Queda así constituido el modelo con los seis subdominios.

Los autores concluyen que aquel profesor que no conozca bien la materia no tendrá el conocimiento necesario para enseñar el contenido, pero conocer bien un tema no es suficiente para la enseñanza. Los docentes necesitan conocer la matemática de tal manera que sean capaces de dotar de sentido el trabajo de los estudiantes y de elegir la mejor forma de representar el contenido.

Por otro lado, Coll, Colomina, Onrubia y Rochera (1992) focalizan su atención en la enseñanza. Pretenden comprender cómo los alumnos aprenden determinados contenidos como consecuencia de la influencia educativa que ejerce el profesor sobre ellos. Con este fin proponen identificar aquellos mecanismos mediante los cuales una persona incide sobre otra ayudándole a construir un sistema de significados compartidos referidos a algún tema. Uno de estos mecanismos que sostienen como hipótesis es la *cesión y traspaso progresivos de la responsabilidad y control* en el aprendizaje.

Los autores toman el concepto de *interactividad* como una forma de organización de la actividad conjunta entre docente y alumno, lo cual implica tener en cuenta la *dimensión temporal* de los procesos de enseñanza y aprendizaje, el *contenido y/o tarea* en torno al cual se articula la actividad conjunta, y ciertas *unidades de análisis*. Respecto a estas últimas, consideran las *secuencias didácticas*, las cuales son diseñadas respetando su contexto natural. Dado que esta última es una unidad de análisis global, surge otra de menor amplitud denominada *sesión de trabajo* y, como en ocasiones esta parcelación no aporta demasiada información, se determina otra unidad de análisis más pequeña llamada *segmento de interactividad*. Estos segmentos de interactividad se definen por el conjunto de actuaciones esperadas o esperables y aceptadas o aceptables de los participantes. Para identificarlos se siguen dos criterios: la unidad temática o de contenido y el patrón de comportamientos dominantes. Sin embargo no permiten profundizar en los procesos de construcción de significados, por lo cual se presenta una nueva unidad de análisis, de naturaleza semiótica, denominada *mensajes*. Esta es la unidad mínima y refiere a la expresión de uno de los participantes que tiene sentido por sí misma y que no puede descomponerse en unidades más elementales sin perder el significado que transmite.

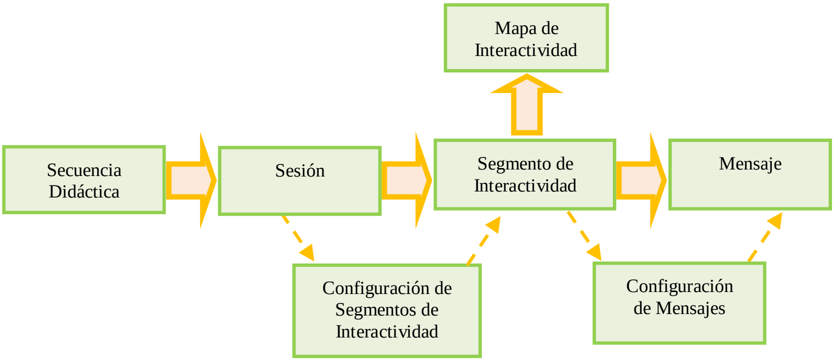

Figura 2. Esquema de segmentación del contenido de las clases

Junto a las cuatro unidades básicas de análisis señaladas, los autores muestran la existencia de una *configuración de segmentos de interactividad* que abarca varios segmentos de interactividad relacionados entre sí. También mencionan una unidad de análisis intermedia entre los segmentos de interactividad y los mensajes, llamada *configuración de mensajes* (CM), referida a agrupaciones de mensajes que transmiten significados que no pueden reducirse a la suma de los significados transmitidos por cada uno de los mensajes que la integran. Estas últimas son las que se toman como unidad de análisis en el presente trabajo. Un esquema que procura representar estas ideas se presenta en la Fig. 2 (Ciccioli y Sgreccia, 2017).

Método

El caso en estudio es el PM, una de las once carreras de grado de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario (Argentina), cuyo plan de estudios es de cuatro años de duración. En particular, Geometría I es una de las cuatro asignaturas anuales de primer año, con siete horas reloj semanales de cursado, que se desarrolla en común con la carrera Licenciatura en Matemática, durante 30 semanas comprendidas entre principios de marzo a fines de junio (primer semestre, donde se cursa la parte relativa a Geometría Sintética) y principios de agosto a fines de noviembre (segundo semestre, en la que se estudia Geometría Analítica).

En el programa vigente de Geometría I se especifica que en ambas partes (Geometría Sintética y Analítica) se estudia tanto el plano como el espacio euclídeo. Además, se reconoce a la Geometría Euclídea como el ámbito propicio para que el alumno que recién se inicia en el aprendizaje profundo de la matemática comience a desarrollar las aptitudes más importantes que necesitará tanto en las asignaturas subsiguientes como en su labor profesional futura. Esto se debe a que en esta asignatura se introduce el primer sistema axiomático donde los teoremas y definiciones se deducen con rigurosidad lógica a partir de estos hasta construir una teoría matemática profunda, lo que constituye la base del quehacer matemático. También, debido a que se introduce el razonamiento abstracto con modelos concretos que los alumnos traen parcialmente incorporados de la escuela secundaria, procurando que la asimilación de nuevos conceptos y de nuevas formas de razonar se realice sobre la base de una experiencia previa. En la materia se presenta además una gran variedad de problemas donde se introduce tanto la modelización de situaciones reales que pueden resolverse con argumentos matemáticos sencillos, así como de problemas teóricos más profundos. Se manifiesta que en todos ellos se pretende estimular la creatividad y la rigurosidad en el razonamiento de los estudiantes.

En particular, la parte de Geometría Sintética comprende ocho unidades temáticas: 1. El espacio geométrico; 2. Figuras planas; 3. Medidas de figuras planas; 4. Más sobre figuras planas; 5. Cuerpos: características y medidas; 6. Semejanza; 7. Trigonometría; 8. Movimientos en el plano. El trabajo realizado en esta investigación se basa en observaciones de ocho clases (que abarcan las unidades temáticas 2 y 3, desarrolladas durante un mes -del 8 de abril al 8 de mayo- y a un mes de comenzado el año lectivo) de la asignatura Geometría I del PM.

Se tomó registro escrito exhaustivo de las mismas con su posterior redacción a modo de relato. En estos relatos se distinguieron los distintos *momentos* de las clases, siguiendo la idea de CM propuestas por Coll et al. (1992). Después se procedió a identificar en los relatos de observaciones los distintos subdominios del MKT (Ball et al., 2008) y dentro de cada uno de ellos surgieron diversas modalidades. Estas representan el contenido concreto relativo a particularidades de cada subdominio que fue posible reconocer y cuya delimitación caracteriza el conocimiento para enseñar Geometría Sintética que pone en juego y promueve el docente del curso (se harán explícitas en la parte correspondiente a resultados). De este modo cada modalidad se asocia a uno o más mensajes (extractos de los relatos) que, si bien pueden estar expresados con palabras distintas, tienen la misma naturaleza semiótica (que es lo que se procura dar a conocer mediante la denominación de la modalidad).

A partir de lo anterior, se elaboró una matriz para cada clase, en la cual se volcaron los momentos de las clases y los dominios que se activaron en cada uno de ellos. Esta síntesis colaboró en el análisis, el cual derivó en un esquema lógico-conceptual que concentró las regularidades halladas. Estas cuestiones resultaron provechosas para la detección de limitaciones y oportunidades en las clases, lo cual constituyó el puntapié para elaborar una propuesta didáctica para el PM. En este caso, las *limitaciones* refieren a alguna cuestión de la enseñanza que entorpece la compresión de los estudiantes, mientras que con *oportunidades* se hace alusión a momentos provechosos y útiles que colaboran con la construcción del conocimiento matemático para la enseñanza de la Geometría Sintética de los alumnos que serán futuros docentes.

En cuanto a los participantes de la investigación, se destaca que es el cuarto año consecutivo que el docente se desempeña en la materia, tiene 30 años de edad y casi 10 de antigüedad en docencia universitaria. Posee los títulos de Licenciado y Doctor en Matemática, y desarrolla una carrera como investigador en la disciplina. El curso está formado por 70 alumnos, de los cuales 2 son recursantes (habían cursado la materia el año anterior pero con desempeños no satisfactorios) y las dos terceras partes aproximadamente corresponden a la carrera PM. Si bien en su mayoría son recién egresados de la escuela secundaria (18 años de edad), es posible distinguir algunos de mayor edad (llegando incluso a los 60 años). Acerca de la procedencia, casi todos son de Rosario o de localidades cercanas (de la provincia de Santa Fe, Entre Ríos o norte de Buenos Aires), presentándose algunos casos de extranjeros (Venezuela, Colombia).

Resultados

A partir de los relatos de observaciones de las clases, se procedió a distinguir en ellos tanto las CM de interactividad (Coll et al., 1992) como los subdominios del MKT (Ball et al., 2008).

Tabla 1.
CM de las clases observadas

Clase	CM
1	1. Introducción a la medida de segmentos 2. Base axiomática de la medida de segmentos 3. Definiciones variadas 4. Procedimientos 5. Introducción a la medida de ángulos 6. Base axiomática de la medida de ángulos 7. Definiciones variadas 8. Continuación de “Base axiomática de la medida de ángulos” 9. Procedimientos 10. Definiciones y propiedades a partir de los axiomas 11. Cierre de la clase
2	1. Repaso de contenidos 2. Construcción y definición de bisectriz 3. Definiciones de cuadriláteros 4. Definición y propiedades de congruencia de triángulos 5. Cierre de la clase
3	1. Repaso de contenidos 2. Demostración de lema 3. Definiciones y demostración de ángulos entre rectas paralelas 4. Demostraciones variadas 5. Cierre de la clase
4	1. Repaso de contenidos 2. Construcción de criterios de congruencia de triángulos 3. Cierre de la clase

Tabla 1. *(.../...)*

Clase	**CM**
5	1. Repaso de contenidos 2. Enunciado, demostración y utilidad de lema y criterios 3. Cierre de la clase
6	1. Disculpas y motivación a los alumnos 2. Repaso de contenidos 3. Resolución de problemas 4. Demostración de criterios de congruencia de triángulos 5. Definición de congruencia de polígonos 6. Introducción a área 7. Base teórica de área y demostraciones 8. Cierre de la clase
7	1. Repaso de contenidos 2. Demostración de teoremas de área
8	1. Introducción al teorema de Pitágoras 2. Demostración del teorema de Pitágoras 3. Cierre de la clase de teoría

En la Tabla 1 se presentan las CM identificadas en las ocho clases observadas. Se puede distinguir que, por lo general, las clases comenzaban con un repaso de contenidos, ya sean previos o dados en oportunidades anteriores en la misma asignatura. Otra regularidad es el cierre de la clase, a veces antecedido por demostraciones o definiciones variadas. Cabe destacar que tanto el repaso de contenidos como el cierre de la clase tenían una duración menor a cinco minutos. El desarrollo en sí de las clases (CM intermedias) se caracterizó por lo general mediante la estructura: *introducción de conceptos* $\rightarrow$ *definición* $\rightarrow$ *demostración* $\rightarrow$ *procedimientos* $\rightarrow$ *problemas*.

En el proceso de identificación de los subdominios del MKT en los relatos de clases, surgieron diversas *modalidades* asociadas a ellos, las cuales se presentan en las Tablas 2 a 7 -correspondiéndose con CCK, HCK, SCK, KCS, KCT y KCC respectivamente-. Para cada una se indica su frecuencia de detección en los relatos y se acompaña con un ejemplo, consistente en un extracto de lo acontecido en las clases que procura ilustrar el sentido semiótico de la modalidad. Cabe advertir que cuando se emplean comillas se trata de palabras textuales del profesor.

Tabla 2.
Modalidades y extractos relativos a CCK

Modalidad	**Extracto del relato**
Formalización (40)	Explica así el Axioma 13 y luego lo escribe en el pizarrón
Definición (20)	“Bien, eso es medir: asignarle un número al segmento”
Explicación de procedimientos (12)	Explica cómo llevar a cabo el transporte de ángulos
Introducción de notación (7)	Aclara que los lados con la misma cantidad de marcas son congruentes, y lo mismo sucede para los ángulos
Verificación de procedimientos (5)	Luego comprueba, utilizando las herramientas de GeoGebra, que los ángulos que obtuvieron son iguales a α, verificando así que el procedimiento llevado a cabo es correcto

En la Tabla 2 se puede advertir que el proceso de *formalización* se hizo muy presente en las clases, seguido por la *definición*. En la mayoría de los casos, estos dos procesos los desarrolló en interacción con el grupo-clase. En cuanto a los *procedimientos*, siempre se llevaron a cabo con su respectiva e*xplicación*, lejos de recetas memorísticas, y aproximadamente en la mitad de las ocasiones, se los acompañó con su respectiva *verificación*. La *notación* específica que se empleó también se ha ido introduciendo con su razón de ser, sin arbitrariedades.

Como se puede notar en la Tabla 3, el docente efectuó *connotaciones hacia los contenidos* que se estaban trabajando, ponderándolos desde una perspectiva matemática holística. El *contexto histórico* fue tenido en cuenta en numerosas oportunidades, principalmente para introducir un tema y enfatizar la necesidad de su surgimiento. En ocasiones explicitó la razón de ser de las *formalizaciones*, otorgándoles *sentido*. También procuró crear cierto grado de conciencia sobre las *clasificaciones y denominaciones*: cómo pueden ser y hasta dónde abarcan. Algunas veces aludió a *conexiones* *con otros ámbitos,* no matemáticos o del futuro desempeño laboral de los profesores.

Tabla 3.
Modalidades y extractos relativos a HCK

Modalidad	**Extracto del relato**
Connotación hacia los contenidos (14)	"Este es uno de los temas más importantes de la materia, de acá a fin de año en todos los ejercicios lo van a tener que usar junto a semejanza"
Contexto histórico (9)	Comienza así a contar la historia de Pitágoras similar a la que figura en el apunte. Comenta acerca de los pitagóricos, agregando luego que en esa época los números eran distintos
Sentido de la formalización (5)	"La regla es la representación mecánica del axioma 2 o 3, no me acuerdo qué número. Es el que si tenemos dos puntos, podemos encontrar una recta. El axioma 14 va a ser el que después represente mecánicamente el compás. Es el axioma de transporte"
Alcance de las clasificaciones y denominaciones (4)	"Les voy a hacer otra pregunta: Cuando enunciamos el teorema nombramos el cuadrado de un segmento, pero para alguien que no conoce los números tal como lo hacemos nosotros, ¿qué es el cuadrado de un segmento?"
Alusión al trabajo matemático (3)	"Fíjense, estuvimos una hora y media para demostrar, pero así se trabaja en matemática. Uno porque les trae las cosas cocinadas ya pero hay que sentarse y probar"
Vinculación con ámbito extramatemático (3)	"O sea que el área nos da la idea de la dimensión de una pared, por ejemplo, para saber qué cantidad de pintura utilizar. Nos da la idea de cómo se distribuye algo no rígido en una figura plana"
Conexión con futuro desempeño docente de estudiantes (2)	"Esta demostración es clásica, la gente del Profesorado cuando dé clases la pueden dar porque es muy elemental"

En la Tabla 4 se evidencia la presencia de la *construcción previa a la formalización* cada vez que se trabajó algún concepto, lo que subraya la promoción de un proceso gradual al respecto. Las *representaciones gráficas*

Tabla 4.
Modalidades y extractos relativos a SCK

Modalidad	**Extracto del relato**
Construcción previa a la formalización (57)	Pregunta qué características tiene y, como muchos estudiantes mencionan “dos lados congruentes”, dibuja otro trapecio pero ahora rectángulo, mostrando así que la característica en común es solamente un par de lados paralelos
Representaciones gráficas (48)	Realiza un dibujo con el cual explica cómo sería la demostración pero no la escribe
Explicación de estrategias para demostrar un enunciado o resolver problemas (18)	Agrega que siempre que tengan que demostrar algo, deben pensar con qué herramientas cuentan
Justificación de afirmaciones y procedimientos (13)	Sin embargo agrega que no es así como lo van a realizar ellos, sino que lo harán solo con regla y compás porque estas son las herramientas permitidas por los axiomas
Distintas explicaciones de una misma idea (9)	Al finalizar, una alumna comenta que no entendió la parte en que usa el Lema 4 y le explica de manera distinta a la anterior
Interpretación y análisis de enunciados (9)	En particular, se detiene en el ítem 2 y pregunta qué significa que la imagen sea R^+. Muchos estudiantes responden “que es positivo”. Aclara que eso ya lo dice en la parte de “l (PQ) > 0”
Sentido de las denominaciones y propiedades (7)	Explica que se conoce como el primer criterio de congruencia pero, como muy rara vez van a recordar el orden, simplemente lo van a llamar LAL (lado-ángulo-lado)
Trabajo con el error (7)	Piensan juntos por qué es incorrecto el enunciado. “Si vivo en A y quiero ir a B, el camino más corto va a ser ir de A a B que de A a C y de C a B”
Direccionamiento de procedimientos (5)	Al ver que nadie brinda una respuesta relativamente esperada, les da una “pista” mencionando que es una combinación del axioma 15 (no del tercer ítem) y la propiedad 4
Elección o solicitud de ejemplos (4)	Con un triángulo obtusángulo para mostrar que no siempre el pie de la perpendicular está sobre un lado sino en la recta que lo contiene

también fueron utilizadas frecuentemente en las clases, sin duda fuertemente impulsadas por el tipo de asignatura en cuestión, y en su mayoría sirvieron de apoyo visual para ideas matemáticas que se estaban gestando. Por lo general, antes de realizar una demostración, se llevó a cabo alguna *explicación de estrategias* para tal fin, volviendo de este modo a surgir la *construcción previa a la formalización*.

Tabla 5.
Modalidades y extractos relativos a KCS

Modalidad	**Extracto del relato**
Conocimientos previos de estudiantes (29)	Cuestiona a los alumnos cómo medirían el pizarrón si tuviesen un centímetro y la mayoría concuerda en que ponen el centímetro, marcan hasta dónde llega y en esa marca lo vuelven a apoyar
Niveles de entendimiento de los estudiantes (23)	"Este es un poquito más complicado"
Anticipación a respuesta (9)	Como los alumnos tardan mucho en medir los ángulos, dice que después lo hagan en sus casas, pero que la idea es que les queden dos ángulos congruentes
Prevención de errores (9)	Aclara que dos segmentos congruentes no necesariamente son iguales como conjuntos de puntos, pero sí como segmentos
Autoestima estudiantil (8)	Asiente, le menciona a la estudiante que está muy bien
Respuesta dada por el docente (6)	A pesar de la ayuda nadie logra responder correctamente, por lo que encierra con color el segundo ítem del axioma 15
Indicios de dificultad estudiantil detectados por el docente (5)	Parece ser que nota que nadie lo sigue (a mi criterio, habla mucho y muy seguido)

Estos procesos promovieron formalizaciones que no se consuman como impuestas, y también estrategias que no se conciban como mágicas. En esta línea además se notaron momentos en que el docente generaba inquietudes acerca de los *porqué* tanto de las *afirmaciones* como de los *procedimientos*, también en cuanto a las *denominaciones* y *propiedades*, o cuando promovía *distintas explicaciones de una misma idea*. Atento a las peculiaridades matemáticas en tratamiento, ayudó a *interpretar y analizar* rigurosamente los *enunciados*, y también a desglosar lo realizado para aprender a través de eventuales *errores*, entre otras acciones propias de quien hace uso de la matemática en un ambiente específico de enseñanza.

Como se aprecia en la Tabla 5, los *conocimientos previos* de los estudiantes fueron muy tenidos en cuenta por el docente al momento de trabajar en sus clases. También realizó, en numerosas oportunidades, comentarios acerca del *nivel de entendimiento de los alumnos*, pre-suponiendo la complejidad que tendrían ciertos enunciados o actividades para ellos. Por otro lado, el docente ha intentado *prevenir errores*, posiblemente en base a experiencias con cursos anteriores, aunque en algunas oportunidades *anticipó respuestas* a las que estaban aproximándose los estudiantes, o bien, las terminó *dando él* luego de no haberlas obtenido por parte de ellos. Finalmente supo valorar sus logros y detectar sus *dificultades*, favoreciendo la *autoestima* del estudiantado y la comunicación en el aula.

Tabla 6.
Modalidades y extractos relativos a KCT

Modalidad	**Extracto del relato**
Comentario sobre desarrollo de clases (35)	Agrega que van a enunciar todos los criterios juntos, que después los demuestran y si hacen tiempo resuelven algún ejercicio
Formulación de una nueva pregunta (27)	Muchos alumnos responden “πr^2. Agrega “¿Y qué es π?”
Indagación sobre entendimiento (16)	Sin embargo vuelve a preguntar si se entendió el axioma y, como nadie responde, dice: “Levante la mano el que no entendió. ¿Todo el mundo entendió?”
Conclusión y cierre de idea (14)	Concluyendo nuevamente que “no genera criterio de congruencia y que vamos a necesitar tres datos como mínimo”
Explicación a partir de respuesta de estudiante (12)	Un alumno exclama: “¡Un lado!”, a lo que responde: “Bien, cualquier lado. La base de un triángulo es un lado y según el lado que elija voy a tener cierta altura”

Tabla 6. *(…/…)*

Modalidad	Extracto del relato
Repaso de contenidos (10)	Continúa realizando un repaso de lo dado en la última clase de teoría
Explicación a partir de pregunta de estudiante (9)	Una alumna dice que no entiende la pregunta, por lo que procede a explicarla y entre todos se dan cuenta que sí es posible utilizar el teorema
Aportes estudiantiles promovidos y tenidos en cuenta (8)	Le solicita a una alumna que le cuente qué dice el teorema. La estudiante accede
Uso intencional de colores (5)	Escribe con azul lo correcto

En la Tabla 6 se muestra que en reiteradas ocasiones el docente realizó *comentarios sobre el desarrollo de sus clases*, dando la oportunidad a los estudiantes de organizarse. La *formulación de una nueva pregunta* estuvo muy presente, mayoritariamente acompañando la construcción previa a la formalización mencionada en el SCK. Las frecuencias de aparición de algunas modalidades denotan que el docente tuvo en cuenta los comentarios, *aportes* y *respuestas de los estudiantes*, permitiendo que sean partícipes de las clases. También se esforzó por hacer *conclusiones y cierres* parciales de las *ideas*, sin dejar razonamientos aislados o descontextualizados. En momentos puntuales empleó fibrón de algún *color* distinto al negro para resaltar algo.

Tabla 7.
Modalidades y extractos relativos a KCC

Modalidad	Extracto del relato
Apoyo en apunte de la asignatura (25)	Comenta que lo va a explicar rápido primero, que la idea es que lo entiendan y después lo pueden leer bien del apunte
Articulación teoría-práctica (18)	Recuerda el ejercicio 6 de la sección 2.1 para concluir que AB=DC y AD=BC
Articulación vertical en la misma asignatura (11)	Recuerda cómo hacían para medir segmentos y lo compara con la medición de áreas

Tabla 7. *(.../...)*

Modalidad	Extracto del relato
Articulación contenidos-tiempo (4)	"En realidad si tuviésemos tiempo les diría que agarren un triángulo, recorten los ángulos y los peguen todos consecutivos"
Articulaciones horizontal y vertical en el marco de la carrera (4)	Pregunta al curso cuál sería el recíproco del Teorema de Pitágoras, haciendo referencia a lo dado en Álgebra en la parte de Lógica
Materiales de consulta y estudio (4)	Comenta que la demostración original de Euclides la pueden buscar en Internet
Articulación con nivel secundario de educación (3)	Lo lee y dice que "este enunciado está en la manera clásica como se da en la secundaria. Nosotros vamos a hacer un análisis más crítico y vamos a ver que en realidad es más simple"

En algunas ocasiones, tal como se observa en la Tabla 7, el docente contó con el *apunte de la asignatura* principalmente como apoyo para el estudio de los mismos estudiantes, incentivando su lectura como complemento a las clases. Además es posible notar que, en su mayoría, los contenidos no fueron presentados aislados, sino que se realizaron *articulaciones en la propia asignatura* (de forma vertical y con la práctica), *en la carrera* y *con el nivel secundario de educación*.

Discusión

A partir del análisis efectuado, fue posible advertir algunas regularidades, como por ejemplo, que en las clases se desarrolló una estructura recurrente de la forma *repaso-desarrollo-cierre*. Entre los dos primeros dominios más activados en cada clase siempre se encontró el SCK acompañado, por lo general, del KCT (aunque hay excepciones). El primero de ellos solía aparecer en el desarrollo de la clase mientras que, el segundo, al inicio de las mismas. Esto podría dar cuenta de que, al trabajar con los contenidos nuevos, el docente puso en juego cuestiones propias de la profesión, tal como la construcción previa a la formalización, que demuestran cierta comprensión de los conceptos que permite presentarlos de distintas maneras, mediante variedad de registros, en diversos contextos. Por otro lado, al comenzar las clases, se evidencian en mayor medida los comentarios sobre el desarrollo de las mismas y el repaso de contenidos, logrando de este modo una “puesta en situación” de los estudiantes frente a la asignatura.

En aquellos momentos donde se introdujo algún concepto, las modalidades con mayor presencia fueron *Contexto histórico*, *Construcción previa a la formalización*, *Conocimientos previos de estudiantes*, *Formulación de una nueva pregunta*, *Comentario sobre desarrollo de clases* y *Representaciones gráficas*. Es decir, en general cada concepto se construyó en conjunto con los alumnos, mostrando su contexto y relación con los demás.

En el cierre de las clases fue habitual hacer referencia a los *Niveles de entendimiento de los estudiantes*, al *Comentario sobre desarrollo de clases*, al *Apoyo en el apunte de la asignatura* y a la *Articulación*, ya sea *teoría-práctica* o con la *misma asignatura*. Con esto se evidencia el interés del docente en que los alumnos comprendan lo trabajado y lo puedan utilizar para resolver las actividades propuestas, incentivando la lectura individual del apunte a modo de refuerzo.

Además, algunas modalidades estuvieron acompañadas por otras, como por ejemplo, *Representaciones gráficas* y *Construcción previa a la formalización*, o bien, *Explicación a partir de respuesta de estudiante* con *Formulación de una nueva pregunta*, y *Apoyo en apunte de la asignatura* con *Articulación teoría-práctica*. También, si bien hubo excepciones, en la mayoría de los casos la *Explicación de procedimientos* fue seguida por su respectiva *Verificación* y *Justificación*. Estas cuestiones resaltadas pueden observarse en el esquema lógico-conceptual que se presenta en la Fig. 3.

Entre las ***oportunidades*** para la construcción de conocimiento identificadas, se destaca el *repaso de contenidos* previos al inicio de cada clase, como una actividad observada con recurrencia. Esta modalidad del dominio KCT ayuda tanto a los alumnos como al docente a ponerse en situación, favoreciendo de este modo la comprensión y construcción de los conceptos posteriores.

La *articulación de contenidos* atiende a una modalidad detectada en el dominio KCC, mediante la cual el docente debe relacionar lo nuevo con lo que supone que los estudiantes aprendieron en la secundaria, o bien, con lo trabajado previamente ya sea en esta u otra materia. De esta manera se

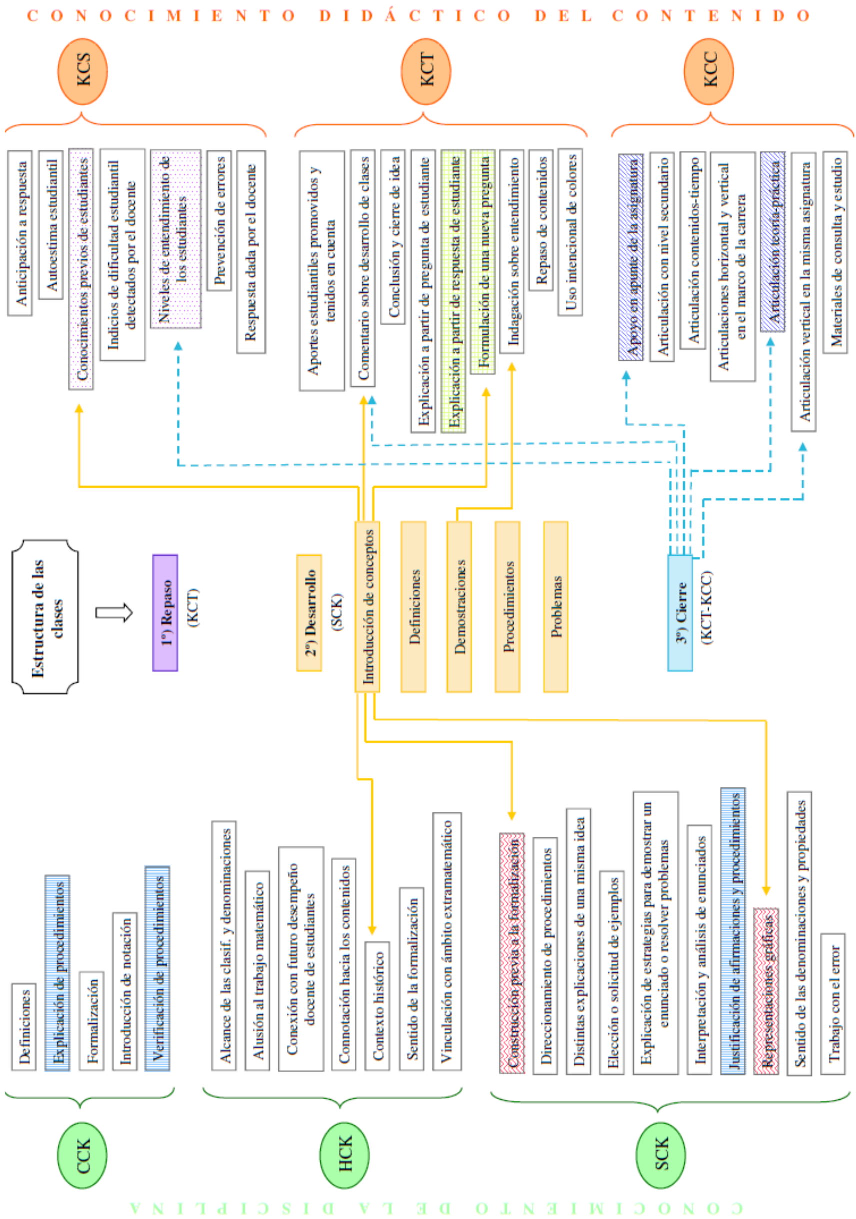

Figura 3. Esquema lógico-conceptual de las clases observadas

colabora con mostrar la matemática de manera integrada, evitando su fragmentación en conceptos aislados.

En Geometría las representaciones gráficas juegan un papel importante, pero no son la única herramienta para construir los conceptos. La *formulación de preguntas orientadoras*, cuestión remarcada en el dominio KCT, puede transformarse en un instrumento muy útil para tal fin, pero para ello se debe dar lugar a la participación estudiantil. Se sugiere que todo profesor, decidido a guiar sus clases con preguntas, debe escuchar a sus alumnos, esperarlos, darles el tiempo necesario para que comprendan la pregunta y elaboren una respuesta.

En cuanto al *error como recurso de enseñanza y aprendizaje* (modalidad distinguida en el dominio KCS), el docente puede preverlos tanto a partir de su propia experiencia con otros grupos, como así también de las dificultades con que se encontró cuando aprendió el concepto, o de lecturas realizadas de artículos de investigación en el área. Estas suposiciones que realiza en cuanto a los posibles errores estudiantiles, debería aprovecharlas, por ejemplo, planteando intencionalmente situaciones donde suponga que el alumno tendrá alguna dificultad, incentivando el análisis de la misma en conjunto con la clase. Por otro lado, frente al error de un estudiante, el docente debe ser muy cuidadoso con las palabras que utiliza y con los modos de remarcar el mismo. Es importante que se trabajen junto al grupo no solo los errores de los alumnos, sino también los eventuales del profesor, por ejemplo, analizando paso a paso qué es lo incorrecto, qué otras situaciones podrían haber surgido, cuál sería una respuesta conveniente y por qué.

Respecto al *conocimiento de la disciplina*, es necesario que el docente cuente con herramientas más avanzadas -con respecto a las que emplea de manera directa en el curso- para poder manipular con mayor libertad el contenido y abordarlo de la mejor manera posible. Pero “saber más” no coincide con “hablar más”; el profesor deber ser consciente que algunas cuestiones podrían confundir a los estudiantes. Por ello es fundamental que entienda la necesidad de “callar” ciertas cosas, de reservarlas para cuando los alumnos hayan comprendido el concepto principal que se está trabajando.

Además de detectar oportunidades, en el estudio realizado se observaron algunas ***limitaciones*** de la enseñanza que pueden repercutir en los aprendizajes. Un ejemplo de ello es el *escaso uso del material concreto* en la educación superior, a pesar de ser una herramienta que ayuda a los alumnos en la manipulación y visualización de los conceptos geométricos. En dicho nivel se suele considerar que el material concreto es una manera de perder el tiempo; se cree, entonces, que existe una debilidad significativa en el proceso de formación de profesores, la cual debería ser estudiada en mayor profundidad.

Posiblemente, en el nivel superior, el *uso de colores variados* en el pizarrón parezca algo muy simple (cuestión observada y remarcada en el KCT). Sin embargo es un recurso que colabora con la visualización y posterior comprensión de los contenidos, principalmente en Geometría. El docente debería tenerlos en cuenta, por ejemplo, para diferenciar la hipótesis y la tesis en un enunciado, o para remarcar conceptos en un mismo dibujo. También, en términos de colaborar con la visualización, podría ser útil la utilización de algún software geométrico.

Otra limitación remarcada es el *abordaje del lenguaje matemático*. Muchas veces será conveniente partir del vocabulario habitual de los estudiantes para, de a poco, pulirlo y llegar a una definición formal. Algo similar se podría tener en cuenta con los procedimientos, transformándolos con la pregunta del docente en un axioma o un teorema. Los alumnos de primer año posiblemente no hayan enfrentado antes la escritura matemática. Por ello es necesario que el docente realice aclaraciones sobre la *notación* (modalidad destaca en el CCK), que enseñe a escribir y a leer el nuevo lenguaje; para ello puede ser de utilidad expresar coloquialmente aquellos enunciados simbólicos que se trabajan por primera vez.

Conclusiones

Al retomar la primera conjetura planteada (*la versión de la Geometría Sintética estudiada en el Profesorado en Matemática dista considerablemente de una versión escolar relativamente propicia de procesos constructivos en la escuela secundaria*), se puede concluir que durante las clases observadas de Geometría I se ha propiciado la construcción de conceptos, analizando su origen, sus “porqué”, conectando los contenidos y, de este modo, favoreciendo la futura enseñanza de los mismos. Es decir, si bien en las clases se podría realizar mayor cantidad de relaciones con el nivel secundario, la distancia mencionada en la conjetura propuesta no es tan grande como se suponía. Sin embargo se cree que este acercamiento no se hace explícito a los futuros profesores en las clases; ¿será que el mismo es llevado a cabo en alguna otra asignatura correspondiente a la práctica docente?, ¿o simplemente es un trabajo que debe realizar cada uno de los estudiantes, de manera individual y por su propia cuenta? Este es uno de los puntos que se considera se debería seguir estudiando desde la investigación e insistiendo desde la formación docente (Godino et al, 2016).

Respecto a la segunda conjetura señalada (*el conocimiento especializado del contenido de Geometría Sintética, requerido para la enseñanza, queda relegado a la construcción, individual y sin vigilancia epistémica, del estudiante*), se cree que en las clases observadas se evidencia una gran riqueza en las modalidades surgidas en torno al conocimiento especializado del contenido, siendo uno de los subdominios que agrupa la mayor cantidad de modalidades (10 en total, las cuales comprenden cuestiones referidas a la construcción de conceptos, su representación gráfica, la utilización de ejemplos, las estrategias para resolver o demostrar enunciados y la interpretación de los mismos). Por ello, se considera que el conocimiento especializado del contenido no queda relegado totalmente a la construcción propia del estudiante, sino que el docente colabora en la misma y otorga diversas herramientas para que el futuro profesor se apropie de este tipo de conocimiento necesario para llevar a cabo su trabajo.

Por otro lado, el profesor a cargo de la asignatura evidenció contar con un importante conocimiento acerca de la historia de la disciplina y disfrutaba transmitirlo. Asimismo quedan inquietudes acerca de su potencial didáctico en las clases (De Gamboa et al., 2015). Se ha tenido indicios de que el docente considera que el conocimiento debe ser construido por los alumnos, razón por la cual incentivó la participación de los mismos en las clases. Permitió que los estudiantes conjeturen, pregunten, reflexionen, relacionen conceptos, trabajen con el error. Se lo notó muy comprometido con la preparación de sus clases, demostrando interés en proporcionar situaciones de aprendizaje en el aula de la manera más clara y adecuada posible. Mencionó conceptos propios de la escuela secundaria, tomándolos como conocimiento previo de los alumnos, relacionando ambos niveles. Procuró repasar las explicaciones la cantidad de veces que sea necesario, de distintas maneras, a veces realizando analogías con la vida cotidiana o utilizando software geométrico. A pesar de no haber recibido una formación pedagógica específica, demostró tener sus propias concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje, basadas en la experiencia y la reflexión. Sin embargo, en algunas ocasiones fue impaciente frente a las respuestas de los alumnos, cuestión que intentó mejorar con el tiempo. Estas respuestas, al comienzo de las observaciones, eran breves, poco concisas y solo surgían si el docente preguntaba. Con el correr de los días, los alumnos comenzaron a participar en mayor medida, a cuestionar y a trabajar, generándose *cesión y traspaso progresivos de la responsabilidad y control* en el aprendizaje, en términos de Coll et al. (1992). La relación entre ellos era muy buena, lo cual permitió un cómodo clima de trabajo grupal.

Las cuestiones presentadas pretenden promover la reflexión sobre la propia práctica, la cual debería acompañar a los docentes durante toda la carrera, y teniendo en cuenta el caso de la asignatura en estudio, dirigida a profesores en formación, resulta fructífero que también se transmita a los alumnos del Profesorado para que ellos también lo tengan en cuenta en su futura práctica, como señalan Sgreccia y Massa (2012) y Yang (2012).

Finalmente, se destaca que lo presentado en este artículo, tanto las *modalidades* emergentes como las *limitaciones* y *oportunidades* para la construcción de conocimiento geométrico reconocidas, contribuye a conocer acerca de las prácticas de enseñanza para la construcción de conocimientos de Geometría Sintética en la formación inicial de profesores en Matemática. También puede resultar de utilidad para abordar el análisis de la enseñanza y el aprendizaje de otras temáticas, asignaturas o áreas de la Matemática. Incluso puede ser tomado para estudiar el caso de otros Profesorados en Matemática en el área de Geometría Sintética.

Bibliografía

Acosta, M., Mejía, C. y Rodríguez, C. (2013). Lugares geométricos en la solución de un problema de construcción: presentación de una posible técnica de una praxeología de geometría dinámica. *Educación Matemática, 25*(2), 141-160.

Atiyah, M. (2001). Mathematics in 20th Century: Geometry vs Algebra. *Mathematics Today, 37*(2), 47-49.

Ball, D. (1988). *Knowledge and reasoning in mathematical pedagogy: Examining what prospective teachers bring to teacher education*. Tesis de Doctorado. East Lansing: Michigan State University.

Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What Makes It Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407. Doi: 10.1177/0022487108324554

Barrantes, M. y Blanco, L. (2005). Análisis de las concepciones de los profesores en formación sobre la enseñanza y aprendizaje de la geometría. *Números, 62*, 33-44.

Borba, M. (2006). Diversidade de questões em formação de professores de matemática. En M. Borba (Coord.). *Tendências Internacionais em Formação de Professores de Matemática* (pp.9-26). Belo Horizonte: Autêntica.

Ciccioli, V. y Sgreccia, N. (2017). Formación en geometría analítica para futuros profesores. Estudio de caso basado en el MKT. *Educación Matemática*, *29*(1), 141-170. Doi: 10.24844/em2901.06

Coll, C., Colomina, R., Onrubia, J. y Rochera, M. (1992). Actividad conjunta y habla: una aproximación al estudio de los mecanismos de influencia educativa. *Infancia y aprendizaje, 59-60*, 189-232. Doi: 10.1080/02103702.1992.10822356

Consejo Interuniversitario Nacional (2013). *Estándares para la Acreditación de las carreras de Profesorado Universitario en Matemática.* Retrieved from: http://www.cin.edu.ar/descargas/asuntosacademicos/18-12-%20Subcom.%20Profesorados%20-%20Estandares%20MATEMATICA.doc

Corica, A. y Marin, E. (2014). Actividad de estudio e investigación para la enseñanza de nociones de geometría. *Números, 85*, 91-114.

De Gamboa, G., Badillo, E. y Ribeiro, M. (2015). El horizonte matemático en el conocimiento para la enseñanza del profesor: geometría y medida en educación primaria. *PNA*, *10*(1), 1-24.

Escudero, D., Carrillo, J. y Flores, E. (2015). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas. *PNA, 10*(1), 53-77.

García, M. (2005). La formación de profesores de matemáticas. Un campo de estudio y preocupación. *Educación Matemática*, *17*(2), 153-166.

Gascón, J. (2002). Geometría sintética en la ESO y analítica en el Bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados? *Suma, 39*, 13-25.

Godino, J.D., Gonzato, M., Contreras, A., Estepa, A. y Díaz-Batanero, C. (2016). Evaluación de Conocimientos Didáctico-Matemáticos sobre Visualización de Objetos Tridimensionales en Futuros Profesores de Educación Primaria. *REDIMAT*, *5*(3), 235-262. Doi: 10.4471/redimat.2016.1984

Gutiérrez, A. (2010). Introducción al Seminario I sobre Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría. En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. Sierra (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp.17-19). Lleida: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Ministerio de Educación (2010). *Proyecto de mejora para la formación inicial de profesores para el nivel secundario – Matemática* (pp.118-179). Buenos Aires: Ministerio de Educación.

Santana, N. y Climent, N. (2015). Conocimiento Especializado del Profesor para la utilización de GeoGebra en el Aula de Matemáticas. *Números, 88*, 75-91.

Sgreccia, N. y Massa, M. (2012). ´Conocimiento especializado del contenido´ de estudiantes para profesor y docentes noveles de matemáticas. El caso de los cuerpos geométricos. *Educación Matemática, 24*(3), 33-66.

Taylan, R.D. y Da Ponte, J.P. (2016). Investigating pedagogical content knowledge-in-action. *REDIMAT, 5*(3), 212-234. Doi: 10.17583/redimat.2016.2227

Yang, K-J. (2012). How do elementary preservice teachers form beliefs and attitudes toward geometry learning? Implications for teacher preparation programs. *REDIMAT, 1*(2), 194-213. Doi: 10.4471/redimat.2012.10

Lucía Inés Schaefer es profesora de matemáticas, de la Universidad Nacional de Rosario, Argentina.

Natalia Fátima Sgreccia es profesora de enseñanza media y superior de matemáticas y magíster en didácticas específicas con mención en el área de matemática, y doctora en Humanidades y Artes con mención en Ciencias de la Educación, de la Universidad Nacional de Rosario, Argentina.

Dirección de contacto: La correspondencia directa sobre este artículo debe enviarse al autor. Dirección Postal: Universidad de Rosario. Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura. Av/ Pellegrini, 250, Rosario, Santa Fe, Argentina. **Email:** lucias@fceia.unr.edu.ar

Uncovering the Relation between CK and PCK: An Investigation of Preservice Elementary Mathematics Teachers' Algebra Teaching Knowledge

Mustafa Güler[1], Derya Çelik[1]

1) Karadeniz Technical University. Turkey

Date of publication: June 24th, 2018
Edition period: June 2018-October 2018

To cite this article: Güler, M., & Çelik, D. (2018). Uncovering the relation between CK and PCK: An investigation of preservice elementary mathematics teachers' algebra teaching knowledge. *REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education*, *7*(2), 162-194. doi: 10.4471/redimat.2018.2575

To link this article: http://dx.doi.org/10.4471/redimat.2018.2575

REDIMAT, Vol. 7 No. 2 Junio 2018 pp. 162-194

Uncovering the Relation between CK and PCK: An Investigation of Preservice Elementary Mathematics Teachers' Algebra Teaching Knowledge

Mustafa Güler
Karadeniz Technical University

Derya Çelik
Karadeniz Technical University

(*Received: 20 February 2017; Accepted: 18 April 2018;Published: 24 June 2018)*

Abstract

This article discuss the algebra teaching knowledge of preservice elementary mathematics teachers in the context of CK and PCK as well as the relationship between them. The study was conducted with 101 preservice teachers sampled from a state university in Turkey. Rasch analysis was used to interpret the data. The results revealed that preservice teachers performed at mid-level for both CK and PCK tests. It was also found that there was a significant correlation between the CK and PCK test scores. Weaknesses of the preservice teachers in terms of knowledge of the learner component of PCK, in comparison with presentation of content, were identified.

Keywords: Algebra teaching knowledge, content knowledge, pedagogical content knowledge, measuring teaching knowledge

2018 Hipatia Press
ISSN: 2014-3621
DOI: 10.4471/redimat.2018.2575

REDIMAT, Vol. 7 No. 2 Junio 2018 pp. 162-194

Descubriendo la Relación entre CK y PCK: Un Estudio sobre el Conocimiento de la Enseñanza del Álgebra para Futuros Maestros/as

Mustafa Güler
Karadeniz Technical University

Derya Çelik
Karadeniz Technical University

(*Recibido: 20 Febrero 2017; Aceptado: 18 Abril 2018;Publicado: 24 Junio 2018)*

Resumen

Este estudio discute el conocimiento de la enseñanza del álgebra de maestros de matemáticas elementales en el contexto de CK y PCK, así como la relación entre ellos. El estudio se llevó a cabo con 101 futuros/as maestros/as, tomados de la universidad estatal de Turquía. Se utilizó el análisis de Rash para interpretar los datos. Los resultados revelaron que los maestros/as en formación se desempeñan en el nivel medio para las pruebas de CK y PCK. También se encontró que había una correlación significativa entre la puntuación de las pruebas CK y PCK. Se identificaron las debilidades de los futuros docentes en cuanto al conocimiento del del contenido y de los alumnos en el modelo PCK, en comparación con el componente "presentación del contenido."

Palabras clave: Conocimiento de la enseñanza del álgebra, CK, PCK, medición del conocimiento de la enseñanza

2018 Hipatia Press
ISSN: 2014-3621
DOI: 10.4471/redimat.2018.2575

Rapid accumulation of knowledge in society and technological advances require an altering of educational curricula. Teachers, as the primary implementers of teaching programs, play a leading role in the success of a curriculum, even if the curriculum has been perfectly prepared. In this regard, teachers' decisions and applications are fundamentally based on the knowledge they possess. However, the formerly widely-held notion that "the one who knows teaches" is no longer fully supported, with the types of professional knowledge that a teacher should possess being redefined (An, Kulm & Wu, 2004; Baki, 2012a; Ball, Thames & Phelps, 2008; Grossman, 1990; Shulman, 1986).

Shulman (1986), in one of the early works in this area, emphasized 3 fundamental components of knowledge that a teacher should possess. These components include content knowledge, pedagogical content knowledge and curriculum knowledge. Shulman (1987) described the components of content knowledge and pedagogical content knowledge as separate, but related. In this sense, content knowledge is composed of both content knowledge and pedagogical knowledge and is necessary for effective instruction. This type of knowledge represents the capacity for carrying out special representations, examples and demonstrations that allow students to comprehend the given subject matter. In other words, it refers to how subject matter is taught. It concerns anticipating the concepts that may be difficult for students to learn, as well as determining and putting into practice appropriate strategies, techniques and methods for overcoming these difficulties. This classification, which was made by Shulman approximately 30 years ago, has been taken as a reference by various researchers among knowledge categories for specific disciplines.

For instance, numerous scholars (e.g., Baki, 2012a; Ball, Thames & Phelps, 2008; Fennema & Franke, 1992; Grossman, 1990) have defined the concept of mathematics teaching knowledge over time. Ball et al. (2008), for example, describe mathematical knowledge for teaching school mathematics as the ability to use a technique or a method and to determine the most appropriate way to present content, as well as possessing the relevant mathematical content knowledge. What is common for all the above-referenced studies is their emphasis on content knowledge and pedagogical content knowledge as the two most prominent knowledge components a teacher should have.

Defining teaching knowledge and its sub-components is important in terms of forming a basis for evaluating the knowledge of teachers, which is an important process due to its impact on student learning. Studies in this regard may be significant in terms of providing information about the efficiency of in-service and preservice educational activities. However, a review of the related literature reveals that many the existing studies relating teacher knowledge have been conducted primarily on a micro level; i.e., they have mainly focused on a single concept and the teaching of that concept (e.g. Chick & Harris, 2007; Işıksal, 2006; Kazima, Pillay & Adler, 2008; Stump, 1999; Şahin, Gökkurt, & Soylu, 2016; Taylan, da Ponte, 2016). In recent years, there has been increasing number of studies examining teacher knowledge in a particular subject area (Danisman & Tanisli, 2017; Ferrini-Mundy, Burill, Floden & Sandow, 2003; Li, 2007; McCrory, Floden, Ferrini-Mundy, Reckase & Senk, 2012); algebra among them.

The teaching and learning of school algebra has been emphasized in recent years in Turkey due to its crucial role as a foundation for secondary and university level mathematics. When considering mathematics as a generalization process (NCTM, 2000), one can refer algebra as the language of generalization (Usiskin, 1988). Thus, educators have defined algebra as one of the three central learning fields of school mathematics. In addition to its status as basis for more advanced mathematics, algebra is known for improving mathematical thinking and providing opportunities to analyze mathematical issues, and therefore is an important component of the school curriculum (Moses, 1995; NCTM, 2000). With these considerations in mind, the teaching of algebra, as well as learning, becomes an important concern addition to learning of it.

However, although the crucial role of algebra in school mathematics, educational studies in the national perspective revealed low student achievement in algebra learning field (e.g. Çelik & Güneş, 2013; Yenilmez & Avcu, 2009). Similarly, low algebra performance of Turkish students in international exams such as TIMSS (Bütüner & Güler, 2017) and PISA (Anıl, Özer Özkan, & Demir, 2015) has shifted to focus on the studies related to algebra teaching. In other words, investigating algebra teaching knowledge of in service and preservice mathematics teachers in the dimensions of content knowledge and pedagogical knowledge may be a variable to predict the current or future students' academic achievements. In this regard, algebra content knowledge (ACK) and algebra pedagogical content knowledge (APCK) terms come to the forefront. While ACK refers mostly existing objectives in the curriculum and the mathematical facts behind those objectives, APCK is required to simplify these facts as well as knowing the nature of concept, being aware of the misconceptions that students commonly surface, shaping the manner in which teachers teach, making it understandable for students and so on (Ferrini-Mundy, McCrory & Senk, 2006). The components of ACK and APCK are detailed in theoretical framework.

The present study takes this into account by focusing on algebra as a subject field while sampling the content knowledge and pedagogical content knowledge of future teachers.

Theoretical Framework

Various studies have been conducted to define the knowledge types that a mathematics teacher should possess (Baki, 2012a; Ball, Thames & Phelps, 2008; Fennema & Franke, 1992; Grossman, 1990). While some of those studies differ in terms of their definition of context knowledge (Grossman, 1990) or beliefs (Fennema & Franke, 1992) as components of mathematics teaching knowledge, it has been generally agreed that content knowledge and pedagogical content knowledge are the two most important elements of mathematics teaching knowledge. In this respect, content knowledge can be broadly defined as awareness of core mathematical concepts and operations and the relationship between them. Pedagogical content knowledge, on the other hand, includes the knowledge and methods necessary to make mathematics concepts understandable for students. Pedagogical content knowledge, in turn, is made up of components such as knowledge of the learner (student), special teaching methods, methods of planning and presenting content, and approaches for measurement and assessment (Baki, 2012a; Ball, Thames & Phelps, 2008; Grossman, 1990).

Within the scope of this study, the subcomponents of *knowledge of the learner* and *presentation of the content* are emphasized due to their central importance in the teaching-learning environment. Knowledge of learners basically calls for understanding students' thinking and learning difficulties, as well as awareness of their prior knowledge and possible misconceptions

(Baki & Baki, 2010; Baki, 2010; 2012a; Ball, Thames & Phelps, 2008; Marks, 1990; Shulman, 1986; 1987). Presentation of content, on the other hand, involves a multilateral structure including the examples, presentations and analogies used to render content meaningful for students (Ferrini-Mundy, McCrory & Senk, 2006).

While the existing studies aiming to define mathematics teaching knowledge are important in terms of offering a general framework, they are superficial with respect to defining teaching knowledge as it relates to the various subjects and concepts in mathematics (Li, 2007). The content that requires investigation in terms of algebra, data and geometry knowledge and skills differs in substantial ways. Therefore, different models are needed that are specific to the subject, reflecting its core content, base knowledge and skills. With this in mind, the researchers elected to apply conceptual framework developed by Ferrini-Mundy et al. (2003), as it focuses particularly on the teaching knowledge that is necessary for teaching algebra-related topics. The knowledge types that mathematic teachers should possess for effective algebra teaching are described within this framework, as illustrated in Figure 1.

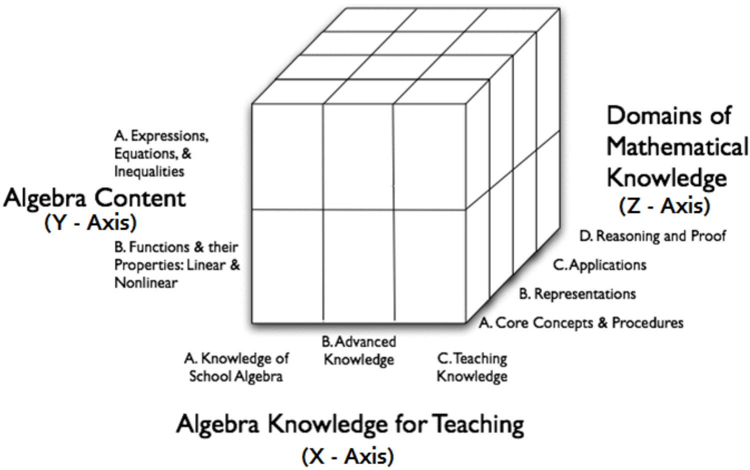

Figure 1. Conceptual framework for evaluating algebra teaching knowledge (Ferrini-Mundy, Floden, McCrory, Senk & Reckase, 2005)

Figure 1 illustrates the requisite knowledge for teaching school algebra within a 3-dimensional structure, comprising algebra knowledge for teaching, algebra content, and the domains of mathematical knowledge. Algebra knowledge for teaching, which is represented by the X-axis, is composed of three subdivisions: school algebra, advanced algebra and teaching knowledge. In this regard, school algebra reflects the attainments of the corresponding curriculum and its pertinent concepts. Advanced algebra, on the other hand, represents secondary school and university level algebra; these form a theoretical base for the conceptual understanding of school algebra. While these two components are primarily related to content, the third component, teaching knowledge, prioritizes instructional activities (Ferrini-Mundy, McCrory & Senk, 2006). In a general sense, teaching knowledge includes a variety of competences that fall within the category of pedagogical content knowledge, including awareness of the reasons that learning a particular concept is difficult; anticipating student misconceptions and incorrect conceptions; and presentation of the mathematical content required to reach instructional attainments (Ferrini-Mundy, McCrory & Senk, 2006). Therefore, it can be said that the teaching knowledge component defined in this framework coincides with the concept of pedagogical of content knowledge described in other theoretical studies.

In the current investigation, algebra content (corresponding to the Z axis) and the domains of mathematical knowledge (the Y axis) of Ferrini-Mundy et al.'s (2005) conceptual framework and outlined in Figure 1 were used as originally designed. However, the algebra knowledge for teaching (corresponding to the X axis) was restricted and adapted to comprise advanced algebra knowledge, knowledge of learners, and presentation of content components. This adapted framework is illustrated in Figure 2.

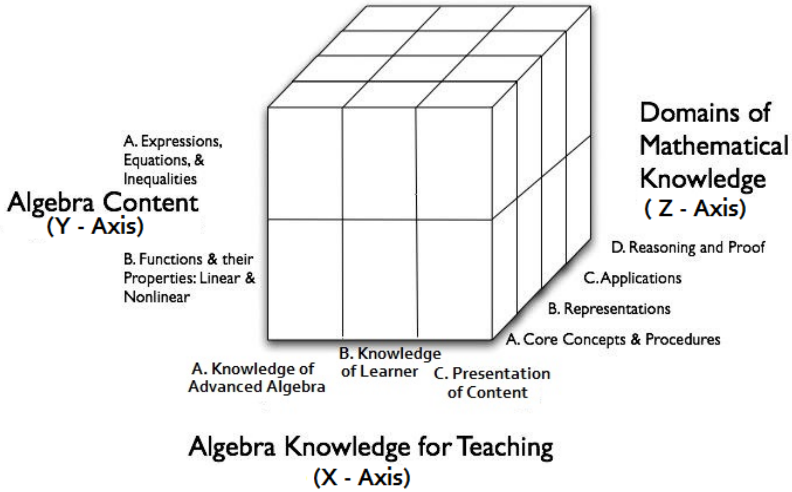

Figure 2. Revised framework for evaluating algebra teaching knowledge

The conceptual framework introduced by Ferrini-Mundy et al. (2005) allows the identification of algebra teaching knowledge of teachers/teacher candidates in terms of preparing qualitatively and quantitatively sufficient questions for each dimension and its components. In this study, we deepened PCK into two dimensions, as they have been frequently mentioned in the literature (Ball, Thames & Phelps, 2008; Shulman, 1986). Questions were prepared to address each of the cubes shown in Figure 2. On the other hand, the content knowledge dimension was restricted to the knowledge of advanced algebra. This restriction can also be seen in other studies (e.g. Li, 2007) that were produced from KAT project.

Aim of the Study

This study aims to investigate the algebra teaching knowledge of senior preservice elementary mathematics teachers at the completion of their teacher training program. In accordance with this aim, the authors focused on the following sub-aims:

- To determine the algebra content knowledge of preservice elementary mathematics teachers,

- To determine preservice elementary mathematics teachers' knowledge of learner and presentation of content as components of their pedagogical content knowledge.
- To investigate whether a relationship exists between content knowledge and pedagogical content knowledge.

Method

This study aims to investigate the algebra teaching knowledge of senior preservice elementary mathematics teachers at the completion of their teacher training program. In accordance with this aim, the authors focused on the following sub-aims:

- To determine the algebra content knowledge of preservice elementary mathematics teachers,
- To determine preservice elementary mathematics teachers' knowledge of learner and presentation of content as components of their pedagogical content knowledge.
- To investigate whether a relationship exists between content knowledge and pedagogical content knowledge.

Participants

The study was performed with 101 preservice teachers in their final semester of an Elementary School Mathematics Education department in a public university in the 2012-2013 academic year. In Turkey, where the study took place, teacher training programs are carried out according to a standardized curriculum overseen by the Turkish Council of Higher Education (YÖK). Thus, the participants had the same learning experience as students enrolled in similar programs in other universities (for a list of the courses included in the program, see YÖK, 2016).

Data Collection Tools

Algebra Content Knowledge (ACK) and Algebra Pedagogical Content Knowledge (APCK) tests developed by researchers were used as data collection tools. The conceptual framework in Figure 2 was utilized in the development process. For the content knowledge and pedagogical content knowledge tests, five main concepts (algebraic expressions, patterns, equality and equations, inequalities and functions) relating to algebra content were targeted with reference with the curriculum. The item pool for the tests was assembled with the help of projects such as TEDS-M and KAT, as well as studies in literature pertaining to student misconceptions and learning difficulties in algebra (Even, 1993; Grossman, 1995; Haciomeroglu, 2005; Özmantar, Bingölbali & Akkoç, 2008; Selden & Selden, 2003).

Five doctorate level postgraduate students were asked to answer and evaluate the items to test their completeness, clarity and correctness. Afterward, as the first step of a pilot study, the tests were revised according to the feedback of the evaluators and then applied to 30 students who were in their 3rd year of study. This pilot study provided insight into the comprehensibleness of the items and helped with the determination of probable responses and the duration of the application. Based on the probable responses, a draft rubric was developed for analyzing the responses of the open-ended questions.

In the next step, the items were compiled in a form (see Appendix 1) and submitted to five academics with degrees in mathematics education. These experts were requested to state the extent to which the items reflected the conceptual framework shown in Figure 2. This process was performed to increase the content validity of the tests. Furthermore, in consideration of the opinions of the experts, four items from the APCK and 1 item from the ACK test were excluded. In the second step, to determine the validity and reliability of the test, the ACK (24 items) and APCK (23 items) were applied with 61 4th year (senior) pre-service teachers within a 120-minute application period. The test booklets were prepared as Group A and Group B to prevent students from influencing each other's answers. The second pilot was important in terms of finalizing the rubrics to be used for evaluating responses to the open-ended questions and for anticipating the test statistics.

The item and test statistics were determined based on the Rash model, which is one of the models of Latent Traits Theory (LTT). According to LTT, there is a relationship between the skills of individuals in a particular field and their responses to question items concerning that field; this relationship can be expressed in a mathematical sense (Berberoğlu, 1998; Doğan, 2002). Since skill scores (described in Logits) can be obtained independently from tests applied to individuals–namely, independent from a group (Berberoğlu, 1998; Wright, 1977), they are more fundamental in nature than both real and observed scores in LTT (given that real and observed scores in classical test theory are dependent on the test). In other words, an individual taking two different examinations targeting the same trait in a close time interval can score lower on the more difficult of the two, and higher on the easier. However, the skill of the individual in relation to the evaluated trait remains constant (Hambleton & Jones, 1993). Numerous projects aiming to evaluate the teaching knowledge of pre-service teachers, such as MT-21 and TEDS-M (Schmidt, et al., 2007; Tatto, et al., 2008), as well as studies evaluating the mathematics performance of students, have applied this theory and model (e.g., Izard, Haines, Crouch, Houston & Neil 2003; Koparan 2012; Misailidou & Williams 2003; Watson, Kelly & Izard 2004). In addition, it is stated in the literature that the Rasch model is an appropriate and easy means for interpretation in developing and evaluating tests, including those consisting of open ended items where participants receive partial credit based on the rate of correctness of their answers (Blömeke, Houang & Suhl, 2011; Koparan, 2012; Warburton, 2013). Backed by these reasons, this model is preferred in developing ACK and APCK tests composed of both multiple choice and open ended questions.

The responses to the test items were scored as 0 or 1 for multiple choice and short answer items, and a maximum of 2 points were given for open ended items. The raw scores obtained from each pre-service teacher were analyzed with WINSTEPS 3.72, which complies with the Rasch model. First, item-model fitness was tested to provide fit validity. Any abnormalities represented a lack of fit between the items and the model (Aziz et al., 2016). In the literature, it is reported that input/output values should fall between 0.5 and 1.7 for item-model fitness (Bond & Fox, 2007).

According to Wolfe and Smith (2007a, 2007b), these values are also indicators of construct validity. This analysis showed that one item in the ACK test, and 3 items in the APCK test, had insufficient fitting values. After concluding that removal of these items would not affect the content validity adversely, these items were excluded from the respective tests. The final ACK test consisted of 23 items, and the final APCK test had 20 items.

Reliability analysis (see Appendix 2) revealed that individual reliability, which presents a close value to the general test reliability coefficient, was between .80 and .82 for the ACK and between .81 and .83 for the APCK. The reliability coefficient Cronbach's Alpha for both tests was calculated as .80. Since the value of Cronbach's alpha was greater than .70, the reliability of the tests falls within the acceptable range (Santos, 1999). (For sample questions, see Appendix 3).

Analysis of Data

The responses given by the participants to the ACK and APCK tests were scored and recorded in two Excel files. The rubrics that had been developed for the purpose were used in the evaluation of the open-ended questions. Table 1 illustrates the scoring rubric for the 3rd item of the ACK test.

Table 1.
Scoring rubric used for the 3rd item of the ACK test.

3. Prove correctness of the following proposition:
"If the graphs of linear functions f(x) = ax+b and g(x) = cx+d intersect at a point *P* on the *x*-axis, the graph of their sum function (f + g) (x) must also pass through P."
(Adopted from TEDS-M Project, See Tatto et al., 2008)

2 points	*Responses make mathematically correct inferences and complete the proof*
1 point	*Responses make mathematically correct inferences but cannot complete the proof*
0 points	*Blank responses, incorrect mathematical statements, fully wrong inferences*

The data were collected in Excel files and then transferred into WINSTEPS 3.72. An item-person map was then prepared for each test by converting the raw scores of the pre-service teachers into linear scores. This was done with the aim of visualizing the achievement state of the candidates. The skill levels of a person for a given trait varies between -3 and +3 logit, and a move from -3 towards +3 represents increasing individual skill level (Cepicka, 2007). In addition to item-person maps, it is also possible to form person-item maps. Item-person maps compare both the skills of the participants and the item difficulties on a single scale. Items having fewer than 0 linear points, *i.e.*, items having a negative linear score in the item-person map, are referred to as hard items (Koparan, 2012). Finally, the correlation between APCK and ACK was determined using the Spearman-Brown analysis due to the data did not fulfill the requirement (ρ>.05) of normality test.

Findings

In this section, the findings of the analyses of the ACK and APCK tests are presented. First, the ACK and APCK scores of the participants were converted to linear scores, and then student achievement and the ratio of the items to which they responded were compared.

Item-person and person-item maps were assembled based on the linear scores extracted from the data obtained from the ACK and analyses. The resulting item-person map is presented in Figure 3, and the person-item map is presented in Figure 4.

The Item – person map shown in Figure 3 reveals that 65 pre-service teachers out of 101 scored below the accepted achievement limit of 0 point for the ACK test. When the whole test is considered, it can be observed that most of the participants scored between -1 and +1, and more than half of the participants falling into this interval scored between -1 and 0. While 11P, 41P and 53P were the most successful participants, 51P, 40P and 75P were the least successful. To determine which items gave the participants difficulty -- in other words, the items that had a lower rate of response, the individual-item map shown in Figure 4 was used.

Item-person and person-item maps were assembled based on the linear scores extracted from the data obtained from the ACK and analyses. The resulting item-person map is presented in Figure 3, and the person-item map is presented in Figure 4.

The person – item map in Figure 4 reveals that the pre-service teachers had the greatest difficulty in a section of item 18 (item 18a) and item 4. On the other hand, item 8 and item 15 respectively were the most easily answered items. The items with a linear point lower than 0 -- i.e., items that the pre-service teachers had difficulty answering, were mainly accumulated in the knowledge component of “linear - non-linear functions and their properties”. Furthermore, when the dimension; “domains of mathematical knowledge" was investigated, it was observed that the pre-service teachers had the greatest difficulty in items that fell into the "applications" knowledge component.

```
More Difficult  More Successful
                 |
     2       X   +
             X   |
             X   |
                 |   11P
             X   |
                 |
                 |   41P   53P
             X   |T
                 |
             X  S|
     1       X   +   19P   23P
                 |   26P
            XX   |
             X   |   10P   37P   44P   71P
           XXX   |   15P   87P   90P
             X   |S  13P   52P   68P   79P
                 |   01P   73P
            XX   |   12P   30P   31P   43P   54P   57P   61P
             X   |   02P   70P   83P
                 |   16P   17P   35P   46P   72P   74P   77P
     0     XXX  M+
                 |   04P   05P   28P   39P   59P   95P
                 |   03P   08P   21P   24P   58P   66P   91P
             X   |M  14P   18P   20P   29P   33P   56P   85P
                     98P
            XX   |   62P   69P   84P  101P
            XX   |   27P   38P
             X   |   07P   25P   32P   64P   65P   89P
                 |   45P   78P   82P   93P
          XXXX   |
             X   |   42P   55P   60P   76P   92P   96P
    -1       X   +   09P   22P   50P   80P   94P   99P  100P
                S|S  67P   88P   97P
             X   |
                 |   34P   36P   48P
            XX   |
                 |   47P   63P   81P   86P
                 |   06P   49P
                 |
                 |
                 |T
    -2       X   +
                T|
                 |
                 |   40P   75P
             X   |
                 |   51P
                 |
                 |
                 |
                 |
    -3           +
Less Difficult  Less Successful
```

*P: Person (For example 27P represents 27th person/participant)

Figure 3. Item – person map of ACK test

```
More Successful  Less Difficult
                ||
     3          ++
                ||
                ||
                ||
                ||
                ||
                ||   8
                ||
                ||
                ||T
     2          ++   15
                ||
                ||
           X    ||
                ||
                ||
          XX    ||   18c    9c
               T||
                ||   9b
                ||S
     1    XX    ++   22
           X    ||   11
                ||   18d    19a    1b     7b
        XXXX    ||
         XXX    ||   2
        XXXX   S||   10     9a
          XX    ||   16     19c
     XXXXXXX    ||   1c
         XXX    ||
     XXXXXXX    ||
     0          ++M  19b    23     5b
      XXXXXX    ||
     XXXXXXX    ||   7a
    XXXXXXXX   M||   12b    13
        XXXX    ||
          XX    ||   19d
      XXXXXX    ||   12c    20     6
        XXXX    ||   21
                ||   1a     3
      XXXXXX    ||
    -1 XXXXXXX  ++   14
         XXX   S||S  12a
                ||
         XXX    ||   17
                ||
        XXXX    ||
          XX    ||   5a
                ||
                ||   18b
               T||   4
    -2          ++   18a
                ||T
                ||
          XX    ||
                ||
           X    ||
                ||
                ||
                ||
                ||
    -3          ++
                ||
Less Successful  More Difficult
```

Figure 4. Person – item map of ACK test

As for the ACK, item-person and person-item maps were assembled based on the linear scores extracted from the data obtained from the APCK and analyses. The resulting item-person map is presented in Figure 5, and the person-item map is presented in Figure 6.

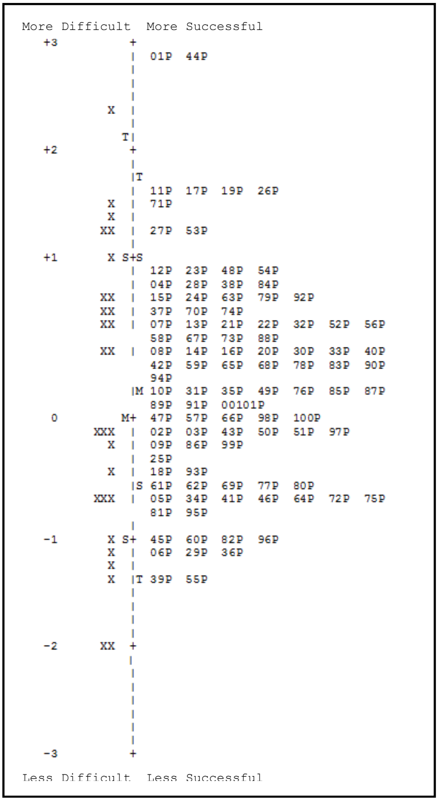

Figure 5. Item – person map of APCK test

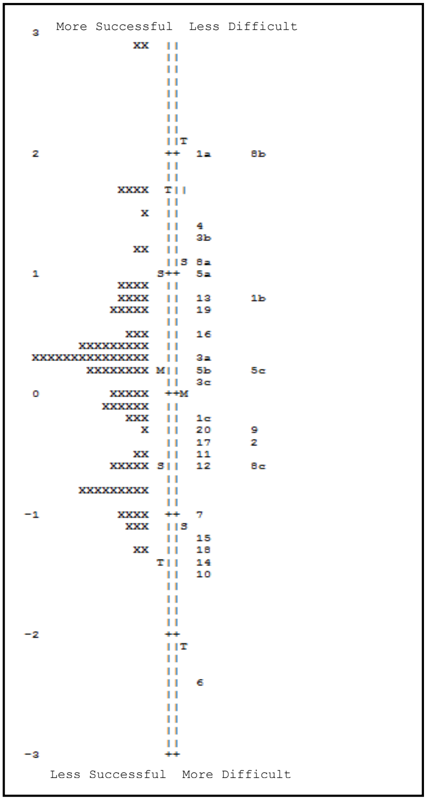

Figure 6. Person – item map of APCK test

Referring to the item-person map in Figure 5, participants 1 and 44 had the highest level of success on the APCK test, while 39P and 55P had the lowest. Furthermore, 47P, 57P, 66P, 98P and 100P performed at moderate achievement level. When all of the participants were considered out of 101 pre-service teachers, it can be seen that 61 of the pre-service teachers were successful, 5 were successful at a moderate level, and 35 pre-service teachers scored below the achievement limit of 0. The scores of the majority of the successful pre-service teachers were between 0 and 1; and the pre-service teachers with low success were between 0 and -1.

An examination of Figure 6, representing the person-item map, reveals that the items with which the pre-service teachers had the greatest difficulty were items 6 and 18. On the other hand, items 1a and 18b were the easiest. Evaluated in the algebra content dimension, the most difficult items for the pre-service teachers were related to "linear- non-linear functions and their properties" in the ACK test. However, in the domains of the mathematical knowledge dimension, quite different results were obtained. In this dimension, the items that presented the most difficulty clustered around the component of "core concepts and procedures". Furthermore, the "applications" component, with which the pre-service teachers had been the least successful in the ACK, was the item answered with the highest ratio for the APCK test. In examining the APCK test in the context of pedagogical content knowledge, it can be said that the pre-service teachers were more successful in answering items related to the presentation of content than items about the knowledge of learners. In other words, the success level of most of the pre-service teachers with respect to items pertaining to the knowledge of learners (31%) was much lower than items about presentation of content (56%).

For the sake of clarifying the issue and forming an overall picture in the context of algebra content and the domains of mathematical knowledge, the distribution of the ACK and APCK test items whose scores fell below 0 in the various components are illustrated in Figure 7 and Figure 8.

Figure 7 shows that pre-service teachers were successful on more than half of the items in the "algebraic expressions, equations and inequalities" component of the ACK and APCK tests. However, the opposite occurred in terms of the "Functions and their properties: Linear and nonlinear" component. Thus, it can be said that the pre-service teachers had greater difficulty with the items related to "linear and nonlinear functions and their properties" than the items concerning "algebraic expressions, equations and inequalities" on both tests. The performance of the pre-service teachers on the items related to the components of domains of mathematical knowledge are presented in Figure 8.

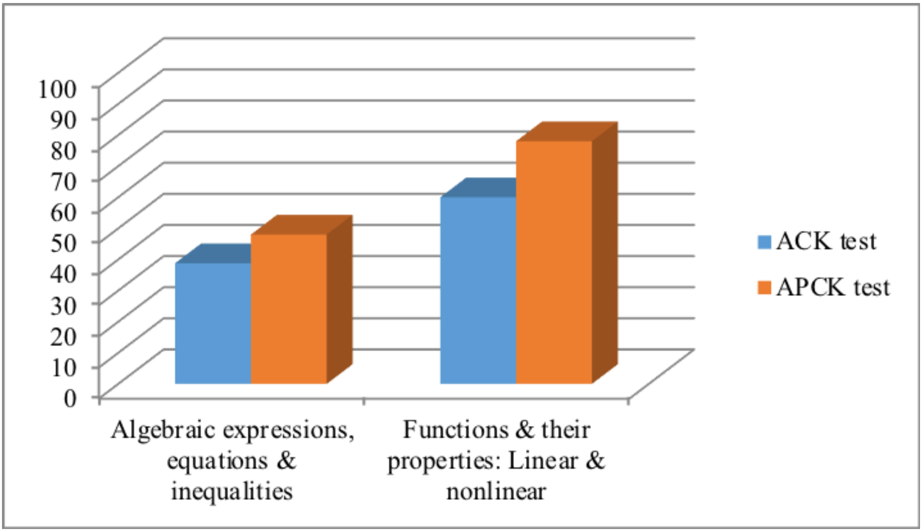

Figure 7. Rate of items falling below the level of zero in the components of algebra content

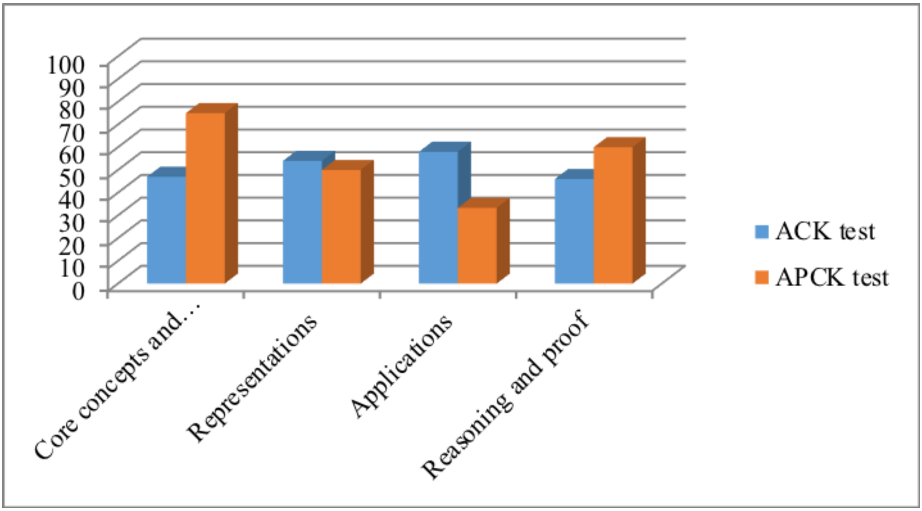

Figure 8. Rate of items falling below zero level in components of mathematical content

Based on the data presented in Figure 8, it can be said that the pre-service teachers exhibited a similar level of success for the component of "representations" on the ACK and APCK tests. However, it was apparent that their performance in the knowledge components such as "core concepts and procedures" and "applications" were quite different. While about the half of the pre-service teachers were not successful in answering the items in the "applications" component of the ACK test, approximately the same ratio fell into one-third on the APCK test. On the "core concepts and procedures" component, approximately one third of the pre-service teachers had difficulty in answering the items on the ACK test, more than two third of them could not answer these on the APCK test. The greatest level of success was seen in the items relating to the "fundamental concepts and procedures" and "reasoning and proof" components of the ACK test, as well as the "applications" and "representations" components of the APCK test.

Finally, the relationship between CK and PCK was determined with the Spearman correlation test. The summary of the test results is shown in Table 2.

Table 2.
Spearman Correlation between APCK and ACK

		APCK	**ACK**
	rho	1.000	0.404**
APCK	p		0.000
	n	101	101
	rho	0.404**	1.000
ACK	p	0.000	
	n	101	101

**Correlation is significant at the .01 level

Table 2 indicates that there was a positive, moderate correlation between PCK and PCK of the participants (Spearman's ρ=.404; p =.000) as expected. In other words, this result indicates that students with high PCK scores had relatively high scores on the CK, as well.

Discussion and Conclusion

In this study, which aimed to determine the algebra content knowledge (ACK) and pedagogical content knowledge (APCK) of pre-service mathematics teachers, an ACK and an APCK test were applied with 101 teacher candidates. A Rasch analysis performed on the results revealed that 36 of the pre-service teachers on the ACK test, and 61 pre-service teachers on the APCK test, scored above the reference success limit level zero. The average linear scores of the pre-service teachers were calculated at -0.3 for ACK and at 0.17 for APCK. Although the average achievement levels of the pre-service teachers on the APCK was higher than on the ACK, it can be said that the achievement level for both tests was similar. When the item-person maps for both tests (Figure 3 and Figure 5) were examined, more than half of the items on the AFCK test and almost half of the items on the APCK had negative logit. In other words, the pre-service teachers had difficulties in answering nearly half of the questions. On the other hand, hypothesizing that there is a relation between content knowledge and pedagogical content knowledge (e.g. Ball et al., 2008; Ozden, 2008); this study has tested and presented evidences from a qualitative study. As a consequence, the results of the current study indicate a positive moderate correlation between APCK and ACK.

As a component of pedagogical content knowledge, knowledge of learners requires awareness of students' pre-knowledge, learning and misconceptions (Baki, 2012b; Ball, Thames & Phelps, 2008; Carpenter, Fennema, Peterson & Carey, 1988; Marks, 1990; Shulman, 1986; 1987). When meaningful learning is defined as learning by associating new information with existing knowledge, and thereby constructing new knowledge, awareness of the prior knowledge of learners is an important consideration for effective instruction (Baki, 2012b). In this respect, the present study showed that the majority of the pre-service teachers had difficulty in situations requiring knowledge of learners; as most of the APCK items that caused difficulty for the pre-service teachers were about determining the way students think. On the other hand, the pre-service teachers were more successful in the presentation of content component than that of knowledge of learners; yet, when the test was reconsidered as a whole it was determined that their achievement was not at an adequate level, and nearly half of the pre-service teachers failed on these items. Thus, enriching the content of the Special Instructional Methods course and teaching it for a longer duration may be considered beneficial both in terms of improving the professional attributions of pre-service teachers and in minimizing the adverse effects of lack of experience of beginner teachers.

Since teachers' mathematics knowledge affects the quality of instruction (Hill et al., 2008), content knowledge is also an important component of mathematics teaching knowledge. At the lower secondary level (middle school in the Turkish Educational System; grades 5 to 8), the topic of equations is important as foundation for advanced algebra. Mathematical content knowledge requires understanding both mathematical facts and the underlying reasons for these facts (Ball, 1988). Therefore, lower secondary level mathematics teachers should be aware not only of the concepts and attainments in the curriculum, but should also have higher secondary (e.g., lycée in the Turkish Educational System; grades 9-12) or sometimes university level mathematics knowledge related to the attainments in the curriculum. One such concept is that of functions, which are instructed implicitly at the lower secondary level. Dubinsky and Harel (1992) argued that functions are a “unique most important” concept for all classroom levels. The present study proved that the pre-service teachers had lack of knowledge about this important concept. This finding is similar to the results of the MT21, an international comparative project concerning the content knowledge of teachers from a wider perspective. In this case, it was determined that half of the participant countries had the lowest scores in the area of functions (Schmidt et al., 2007).

The weaknesses of the pre-service teachers' performance on the algebra content knowledge relating to linear and non-linear functions and their properties was also observed on the pedagogical content knowledge test. Furthermore, the response ratio of the pre-service teachers to the items in the related components of the pedagogical content knowledge test was lower than the field knowledge test (see Figure 7). The result obtained here can be interpreted as weakness in concept knowledge towards content knowledge, an important component of mathematics teaching knowledge that also affects pedagogical content knowledge. This relationship has also been described by Baki (2012a), Heaton (1992), and Hill et al. (2008).

The core concepts and procedures in the domains of mathematical knowledge include opinions and core concepts particular to specific fields, as well as their applied algorithms and mathematical procedures. These include counting, performing calculations, explaining expressions in algebraic form, solving equations, drawing function graphs, and rules or algorithms needed to perform these procedures (Li, 2007). Core algebraic concepts at the lower secondary level include patterns; variables; equations and inequalities; slope and linear functions and their graphs. In this study, one of the greatest level of achievement on the ACK test was related to the items concerning fundamental knowledge, as the researchers anticipated. The majority of the pre-service teachers were successful in responding to the items in this area. On the contrary, items related to core concepts and procedures on the APCK test led to the highest rate of failure. In other words, while the pre-service teachers were successful in their responses to the items relating to core concepts and procedures, they generally failed in their responses to items concerning the teaching of these concepts in relation to students' understanding. This implies that content knowledge alone is not sufficient to teach the subject matter. It is recognized that this idea constitutes the conceptual framework for the theoretical studies defining the types of knowledge that teachers should have, as well as the studies differentiating content knowledge and mathematics teaching knowledge (Baki, 2012a; Ball, Thames & Phelps, 2008; Ferrini-Mundy et al., 2003; Grossman, 1990; Shulman, 1986; 1987). Similar results were also obtained in the TEDS-M project, which investigated the competences of pre-service teachers in an international context. In that project, it was determined that the average level of content knowledge was lower than mathematical pedagogical content knowledge (Tatto et al., 2012). Accordingly, it may be considered that more precise handling of mathematical concepts in teacher training institutions will improve both the mathematics and mathematics teaching knowledge of future mathematics teachers.

With respect to mathematical representations, the skills of organizing mathematical concepts and procedures and inter-relating the concepts are required. In this respect, Ferrini-Mundy et al. (2005) determined algebra-specific representations to be graphs; algebra tiles; tables and variables; and oral explanations of the relationships among them. Numerous studies in this area have remarked that selection, application and transformation among these representations is important for increasing understanding of algebraic concepts (Baki, 2012a; Ferrini-Mundy et al., 2005; Ma, 1999; NCTM, 2000). Considering the findings of the present study, the pre-service teachers showed a moderate level of success on items in the representations component of both the ACK and APCK tests. In other words, nearly half of the pre-service teachers failed on these items on both tests. Weaknesses with respect to algebraic representations, which have been frequently reported in primary and secondary level students (Çıkla, 2004; Hadjidemetriou & Williams, 2002), were also encountered in this study. Because transition among representations is accepted as a fundamental component of mathematical thinking (Çelik, 2007; DeMarois & Tall, 1996; Thompson, 1994), and the transition process contributes to conceptual learning and problem solving (Heinze, Star & Verschaffel, 2009; Işık, Kar, İpek & Işık, 2012; Lesh ve Doerr, 2003), the mathematical and algebraic thinking at the primary and secondary school depends on teachers' effective use of transition among representations. Accordingly, teacher training institutions have a responsibility to ensure that teacher candidates have a solid foundation in this area.

Applications, another component of mathematical knowledge, emphasizes the contextual association of mathematics problems with non-algebraic cases, with other algebra-related topics, or with daily life (Burill, Ferrini-Mundy, Senk & Chazan, 2004; Ferrini-Mundy et al., 2005). In this study, the highest achievements on the APCK test were related to the area of applications. Because the school curriculum stresses teachers' use of real-life applications in supporting meaningful learning, this result can be perceived as positive. However, the pre-service teachers did not exhibit a similar achievement level on the ACK test, hardstand this was shown to be the most difficult component on the content knowledge test. Therefore, it is possible that the pedagogical content knowledge items given in a scenario belonging to the knowledge of learner component already included the expected association, and that this increased the success ratio for the APCK test. Another potential reason for the teachers' greater success in this regard is the fact that the questions on the APCK were by nature suitable for lower achievement levels.

Considering the ACK test, in addition to core concepts and procedures, the pre-service teachers were most successful in the mathematical knowledge domain of "reasoning and proof," such as giving examples and counterexamples for given cases; proving cases by indicating analogies or geometrical proofs; and applying various proof techniques by considering the axiomatic system and making persuasive explanations (Ferrini-Mundy et al., 2005). In this respect, it was initially hypothesized that the reasoning and proof items requiring a high level of cognitive performance would present an area of difficulty; however, the actual performance of the pre-service teachers was contrary to this assumption. This result can be explained by the emphasis given to reasoning and proof during the candidates' undergraduate education and may be seen as a positive aspect of the teacher training curriculum. However, the lack of success in the other domains of mathematical knowledge, as well as the serious weaknesses concerning the teaching of fundamental concepts, necessitates reconsideration of the content of courses in the field.

From an overall perspective, the average APCK scores of the pre-service teachers were higher than the ACK scores. However, the average scores for both tests were close to a median level and did not reflect their intended achievement level. Concerning the pre-service teachers' roles in preparing lower secondary school students for the lycée level, it can be asserted that their knowledge related to the fundamental (core) concepts (e.g., functions) may negatively impact the quality of instruction they are prepared to deliver. The results of the present study coincide both with projects such as the TEDS-M and MT21, as well as the results of the nationwide Teaching Content Knowledge Test (ÖABT[1]). In fact, the average scores for the 2014, 2015 and 2016 mathematics teaching ÖABT examinations were calculated at 20.135, 19.803 and 17.105 out of 50 respectively (ÖSYM, 2014; 2015; 2016), which further supports the results of this study. Additionally, a national project conducted by Çelik et al. (2016) concluded that other universities in Turkey showed similar performance in the context of mathematics teaching knowledge. Because the same teacher training program is applied throughout the country in primary and secondary mathematics teaching programs, the results of this study may reflect the difficulties to be encountered in other universities.

Limitations and Future Research

Current study aimed to investigate the algebra teaching knowledge of mathematics teacher candidates in the context of content knowledge and pedagogical content knowledge. Although this study found a significant relation between CK and PCK there are considerable limitations and suggestions for future research. It was not scope of this paper to make generalization of this result to whole subject areas of mathematics; therefore it is not sufficient to make a general conclusion that CK and PCK are interrelated to each other. The results of this study have only implications for knowledge for teaching algebra. As a result, there is a need for further studies developing measurement tools to be used in other individual (or all) subject areas. On the other hand, the theoretical framework used in this study was designed to examine teaching knowledge in the subject of algebra. Future researchers are suggested to adapt the presented framework to include different subject areas. A further limitation of this study was that the research aimed to picture the current state of the future teachers. There is a need to investigate how teacher training programs affect teacher candidates' CK and PCK throughout their bachelor's programs. The current study is focused only on the senior student teachers. As such, latitudinal studies are recommended by the authors. As a final suggestion, new instructional approaches that have been proven to increase the CK and PCK components of teaching knowledge (e.g. Baki et al., 2016; Santagata & Guarino, 2011) should be implemented in teacher training programs.

Notes

[1] This article is based on a master's thesis completed by the first author under the supervision of the second author.
[2] ÖABT is Turkish National Teacher Examination held by the Student Selection and Evaluation Center of Turkey, an independence institute. The ÖABT is a precondition for teaching at state schools. Graduates who achieve sufficient scores in their fields are appointed to teaching positions by the Ministry of Education.

References

An, S., Kulm, G., & Wu, Z. (2004) The pedagogical content knowledge of middle school, mathematics teacher in China and the U.S. *Journal of Mathematics Teacher Education, 7*, 145–172. Doi: 10.1023/B:JMTE.0000021943.35739.1c

Anıl, D., Özer Özkan, Y., & Demir, E. (2015). *PISA 2012 study national report.* PISA Uluslararası Öğrenci Değerlendirme Programı. Ankara: İşkur Matbaacılık.

Aziz, J. A., Mohamad, M., Shah, P. M., & Din, R. (2016). Differential item functioning in online learning instrument (EPFun). *Creative Education, 7,* 180-188. Doi: 10.4236/ce.2016.71018

Baki M., Baki A., Çelik D., Güler M., & Sönmez N. (2016, August). Improving prospective mathematics teachers' knowledge of student through lesson analysis. *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol 2, pp. 51-58, Szeged: PME.

Baki, A. (2010). An evaluation of teacher training from undergraduate and postgraduate dimensions. *Inonu University, Journal of the faculty of Education, 11*(3), 15-31.

Baki, A. (2012a, June). Matematik öğretme bilgisi [Mathematics teaching knowledge] Congress of 10th National Science and Mathematics Education. 27-30 June, Nigde University, Nigde.

Baki, A. (2012b, September). *Matematik öğretme bilgisi [Mathematics teaching knowledge]*. Symposium of 11th Mathematicians Association, 19-21 September, Ondokuz Mayıs University, Samsun.

Baki, M., & Baki, A. (2010). Experiences of Turkey in teacher training and teaching knowledge of mathematics teachers. *Proceeding of 4th International Symposium of Policies and Issues on Teacher Education*, pp. 225-232.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407. Doi: 10.1177/0022487108324554

Ball, D.L. (1988). *Knowledge and reasoning in mathematical pedagogy: Examining what prospective teachers bring to teacher education*. Unpublished doctoral dissertation, Michigan State University, East Lansing.

Ball, D. L., Bass, H., Lewis, J., Sleep, L., Suzuka, K., Babson, A., Jacobs, J., Kim, Y., Thames, M., & Zopf, D. (2008). *Designing and using problems to teach mathematical knowledge for teaching*. National Council of Teachers of Mathematics Research Presession, Salt Lake City, UT.

Berberoğlu, G. (1998). *Seçme amacıyla kullanılan testlerde Rasch modelinin katkıları*. Yayımlanmamış doktora tezi (Unpublished doctoral dissertation). Hacettepe University, Institue of Social

Sciences, Ankara. Retrieved January, 2014 from https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi.

Blömeke, S., Houang, R., & Suhl, U. (2011). *TEDS-M: Diagnosing teacher knowledge by applying multidimensional item response theory and multi-group models*. IERI Monograph Series: Issues and Methodologies in Large-Scale Assessments. No. 4, pp. 109–126.

Bond, T.G., & Fox, C. M. (2007). *Applying the Rasch model: Fundamental measurement in the human sciences* (2nd ed.) Mahwah, N.J.: Erlbaum.

Carpenter, T. P., Fennema, E., P. L. Peterson, P. L., & Carey, D. A. (1988). Teachers' pedagogical content knowledge of student's problem solving in elementary arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 19*, 385–401. Doi: 10.2307/749173

Cepicka, L. (2007). Measuring psychomotor skills: Developing a scale to measure ball-handling skills using the Rasch measurement model. In Degregorio, R. (Eds) *New developments in psychological testing* (pp. 187-212). New York: Nova Science Publishers.

Chick, H. L., & Harris, K. (2007). *Pedagogical content knowledge and the use of examples for teaching ratio*. Paper presented at conference of the Australian Association for Research in Education. 25 - 28 November, Fremantle, WA.

Çelik, D. (2007). *The analytic overview of algebraic thinking skills of pre-service teachers.* (Unpublished doctoral dissertation). Karadeniz Technical University, Trabzon.

Çelik, D. & Güneş, G. (2013). Different grade students' use and interpretation of literal symbols. *Educational Sciences: Theory & Practice, 13*(2), 1168-1186.

Çelik, D., Birgin, O., Gürbüz, R., Güneş, G., Taşkın, D., … Özmen, Z. M. (2016). *A comparative investigation of the knowledge and beliefs of preservice elementary mathematics teachers.* TUBİTAK Project: 113K805.

Çıkla, O. (2004). *The effects of multiple representations based instruction on seventh grade students' algebra performance, attitude toward mathematics and representation preference*. Unpublished doctoral dissertation, Middle East Technical University, Ankara.

DeMarois, P., & Tall, D. O. (1996). Facets and layers of the function concept. *Proceedings of PME 20*, Valencia, 2, 297–304.

Doğan, N. (2002). *Comparison of classical test theory and latent traits theory by samples.* Unpublished Doctoral dissertation, Hacettepe University, Institute of social sciences, Ankara). Retrieved from: https://tez.yok.gov.tr/

Dubinsky, E., & Harel, G. (1992). Forward. In G. Harel and E. Dubinsky (Eds.*), The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy*, MAA Notes, Number 25 (pp. 7-9). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Even, R. (1993). Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: Prospective secondary teachers and the function concept. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24*(2), 94-116. Doi: 10.2307/749215

Fennema, E., & Franke, M. (1992). Teachers' knowledge and its impact. In D.A. Grouws (Eds.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan Publishing.

Ferrini-Mundy, J., Burrill, G., Floden, R., & Sandow, D. (2003). *Teacher knowledge for teaching school algebra: Challenges in developing an analytical framework*. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, Chicago, IL.

Ferrini-Mundy, J., Floden, R., McCrory, R., Burrill, G., & Sandow, D. (2005). *A conceptual framework for knowledge for teaching school algebra*. East Lansing, MI: Authors.

Ferrini-Mundy, J., McCrory, R., & Senk, S. (2006). *Knowledge of algebra for teaching: Framework, item development and pilot results.* Research symposium at the research pre-session of NCTM annual meeting. St. Louis, MO.

Floden, R. E., Ferrini-Mundy, J., McCrory, R., Senk, S. and Reckase, M. (2005). KAT item development matrix. Retrieved from: http://www.educ.msu.edu/kat/ adresinden 20 Kasım 2013 tarihinde edinilmiştir.

Grossman, P. L. (1990). *The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education*. New York: Teachers College Press.

Grossman, P. L. (1995). Teachers' knowledge. In L. W. Anderson (Ed.), *International encyclopedia of teaching and teacher education* (2nd ed., pp. 20-24). Tarrytown, NY: Pergamon.

Haciomeroglu, G. (2006). *Prospective secondary teachers' subject matter knowledge and pedagogical content knowledge of the concept of* *function*. (Unpublished doctoral dissertation) Florida State University, USA.

Hadjidemetriou, C. and Williams, J.S. (2002). Children's graphical conceptions. *Research in Mathematics Education, 4,* 69-87. Doi: 10.1080/14794800008520103

Heaton, R. M. (1992). Who is minding the mathematics content? A case study of a fifth-grade teacher. *The Elementary School Journal, 93*(2), 153–162.

Heinze, A., Star J. R., & Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 41*(5), 535–540. Doi: 10.1007/s11858-009-0214-4

Hill H. C., Blunk M. L., Charalambous C. Y., Lewis J. M., Phelps G. C., Sleep L., & Ball D. L. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: An exploratory study. *Cognition and Instruction, 26*(4), 430-511. Doi: 10.1080/07370000802177235

Işık, C., Kar, T., İpek, A. S., & Işık, A. (2012). Difficulties encountered by pre-service classroom teachers in constructing stories about line graphs. *International Online Journal of Educational Sciences, 4*(3), 644-658.

Işıksal, M. (2006). *A study on pre-service elementary mathematics teachers' subject matter knowledge and pedagogical content knowledge regarding the multiplicatıon and division of fractions*. Unpublished doctoral dissertation, Middle East Technical University, Ankara.

Izard, J., Haines, C., Crouch, R., Houston, S., & Neill, N. (2003). Assessing the impact of the teaching of modelling: Some implications. In S. Lamon, W. Parker, K. Houston (Eds.), *Mathematical Modelling: A Way of Life*. ICTMA 11 (pp. 165–177). Chichester: Horwood Publishing.

Kazima, M., Pillay, V., & Adler, J. 2008. Mathematics for teaching: observations of two case studies. *South African Journal of Education, 28*, 283–299.

Koparan, T. (2012). *The effect of project based learning approach on the statistical literacy levels and attitude towards statistics of student*.

Unpublished doctoral dissertation. Karadeniz Technical University, Institue of Educational Sciences, Trabzon

Lesh, R. and Doerr, H. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. In R. Lesh & H. Doerr (Eds.) *Beyond constructivism* (pp. 3-34). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Li, X. (2007). *An investigation of secondary school algebra teachers' mathematical knowledge for teaching algebraic equation solving*. (Unpublished doctoral dissertation). The University of Texas at Austin. Retrived from http://hdl.handle.net/2152/3337

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Mathematics Study Panel (2003). *Mathematics proficiency for all students*. Santa Monica CA: RAND.

Marks, R. (1990). Pedagogical content knowledge: From a mathematical case to a modified conception. *Journal of Teacher Education, 41*(3), 3-11. Doi: 10.1177/002248719004100302

McCrory, R., Floden, R., Ferrini-Mundy, J., Reckase, M. D., & Senk, S, L. (2012). Knowledge of algebra for teaching: A framework of knowledge and practices. *Journal for Research in Mathematics Education, 43*(5), 584-614. Doi: 10.5951/jresematheduc.43.5.0584

McMillan, J. H., & Schumacher, S. (2001). *Research in education: A conceptual introduction* (5th ed.). New York: Longman.

Ministry of National Education [MoNE] (2013). *Ortaokul öğretim matematik dersi (5, 6, 7 ve 8. Sınıflar) öğretim programı [Curriculum of elementary mathematics for 5th,6th,7th and 8th grades]*. Ankara: MEB Yayınları.

Misailidou, C., & Williams, J. (2003). Diagnostic assessment of children's proportional reasoning. *Journal of Mathematical Behaviour, 22*, 335–368. Doi: 10.1016/S0732-3123(03)00025-7

Moses, R. (1995). Algebra, the new civil right. In C. B. Lacampagne, W. Blair, & J. Kaput (Eds.), *The algebra initiative colloquium* (Vol. 2) (pp. 53-67). Washington, DC: U.S. Department of Education, Office of Educational Research and Improvement.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA: Author.

Ozden, M. (2008). The effect of content knowledge on pedagogical content knowledge: The case of teaching phases of matters. *Educational Sciences: Theory and Practice, 8*(2), 633-645.

Öğrenci Seçme & Yerleştirme Merkezi [ÖSYM] (2014). 2014 Kamu Personeli Seçme Sınavı A Grubu ve Öğretmenlik Sonuçları. [[Results of Teacher Selection Examination of 2014] Retrieved January, 2015 from http://dokuman.osym.gov.tr/pdfdokuman/2014/KPSS/OABT-SORUYANIT/KPSS-2014-OABTsayisal25072014.pdf

Öğrenci Seçme & Yerleştirme Merkezi [ÖSYM] (2015). 2015 Kamu Personeli Seçme Sınavı Öğretmenlik Sonuçları [Results of Teacher Selection Examination of 2015] . Retrieved December, 2015 from http://dokuman.osym.gov.tr/pdfdokuman/2015/KPSS/2015KPSS_SAYISABILGILER28082015.pdf

Öğrenci Seçme & Yerleştirme Merkezi [ÖSYM] (2016). 2016 Kamu Personeli Seçme Sınavı Öğretmenlik Sonuçları [Results of Teacher Selection Examination of 2015] . Retrieved September, 2016 from http://dokuman.osym.gov.tr/pdfdokuman/2016/KPSS/OABT/OABTSonucSayisalBilgiler02092016.pdf

Özmantar, M.F., Bingölbali, E. & Akkoç, H. (Ed.) (2008). *Matematiksel kavram yanılgıları ve çözüm önerileri.* Ankara: Pegem Akademi.

Santagata, R., & Guarino, J. (2011). Using video to teach future teachers to learn from teaching. *ZDM, 43*(1), 133-145. Doi: 10.1007/s11858-010-0292-3

Santos, J.R.A. (1999). Cronbach's alpha: A tool for assessing the reliability of scales. *Journal of extension, 37*(2), 1-5.

Schmidt, H. W., Tatto, M. T., Bankov, K., Blömeke, S., Cedillo, T., Cogan, L., Han, S., Houang, R., Hsieh, F. J., Paine, L., Santillan, M., & Schwille, J. (2007). *The preparation gap: Teacher education for middle school mathematics in six countries*. Mathematics Teaching in the 21st Century, Center for Research in Mathematics and Science Education, Michigan State University.

Selden, A. & Selden, J. (2003). *Errors and misconceptions in college level theorem proving*. Tennessee Technological University Department of Mathematics Tech Report No. 2003-3. Retrieved from http://math.tntech.edu/techreports/TR_2003_3.pdf

Shulman, L.S. (1986). Those who understand; Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14. Doi: 10.3102/0013189X015002004

Shulman, L.S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57* (1), 1-22. Doi: 10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411

Stump, S. L. (1999). Secondary mathematics teachers' knowledge of slope. *Mathematics Education Research Journal, 11*(2), 124–144. Doi: 10.1007/BF03217065

Şahin, Ö., Gökkurt, B., & Soylu, Y. (2016). Examining prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge on fractions in terms of students' mistakes. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 47*(4), 531-551. Doi: 10.1080/0020739X.2015.1092178

Tatto, A., Teresa, M., Schwille Prof, J., Senk Prof, S., Lawrence, C., Peck Mr, R., & Rowley Dr, G. (2012). *Policy, practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics in 17 countries: Findings from the IEA Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M)* (pp. 1-297). International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).

Tatto, M. T., Schwille, J., Senk, S., Ingvarson, L., Peck, R., & Rowley, G. (2008). *Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M): Conceptual framework.* East Lansing, MI: Teacher Education and Development International Study Center, College of Education, Michigan State University.

Taylan, R.D., & da Ponte, J.P. (2016). Investigating pedagogical content knowledge-in-action. REDIMAT, 5(3), 212-234. doi: 10.4471/redimat.2016.2227

Thompson, P. W. (1994). Students, functions, and the undergraduate curriculum. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, and J. J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education,* 1 (Issues in Mathematics Education Vol. 4, pp. 21-44). Providence, RI: American Mathematical Society.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variable. In A. F. Coxford and A. P. Shulte (Eds.), *The ideas of algebra, K-12*

(1988 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, pp. 8-19). Reston, VA: NCTM.

Warburton, R. (2013a) 'Mathematical Knowledge for Teaching': Do you need a mathematics degree? *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 33*(2), 61-66.

Watson, J., Kelly, B., & Izard, J. (2004). Student change in understanding of statistical variation after instruction and after two years: An application of Rasch analysis. *AARE Conference*, Melbourne, Url: http://www.aare.edu.au (search code WAT04867).

Wolfe, EW, & Smith Jr, EV. (2007a). Instrument development tools and activities for measure validation using Rasch models: part I-instrument development tools. *Journal of Applied Measurement, 8*(1), 97-123.

Wolfe, EW, & Smith Jr, EV. (2007b). Instrument development tools and activities for measure validation using Rasch models: part II--validation activities. *Journal of Applied Measurement, 8*(2), 204-234.

Wright, B. D. (1977). Solving measurement problems with the Rasch model. *Journal of Educational Measurement, 14*(2), 97 – 116. Doi: 10.1111/j.1745-3984.1977.tb00031.x

Yenilmez, K., & Avcu, T. (2009). Sixth grade students' success levels on algebra learning domain. *Ahi Evran Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 10*(2), 37-45.

Yüksek Öğretim Kurumu [YÖK] (2016). *İlköğretim matematik öğretmenliği lisans programı [Bachelor curriculum of elementary school mathematics education department]*. Retrieved from http://www.yok.gov.tr/documents/10279/49665/ilkogretim_matematik/cca48fad-63d7-4b70-898c-dd2eb7afbaf5

Mustafa Güler is a PhD. candidate at the Karadeniz Technical University, Turkey.

Derya Çelik is associated professor at the Karadeniz Technical University, Turkey.

Contact Address: Direct correspondence concerning this article, should be addressed to the author. Postal address: Karadeniz Technical University, 61300, Trabzon, Turkey. **Email**: mustafaguler@ktu.edu.tr

Appendix 1

Expertise form for 15th question of APCK test

Algebra Content		PCK		Domains of Mathematica Knowledge	
Expressions, equations and inequalities	☐	Knowledge of learner	☐	Core concepts and procedures	☐
Functions, their properties: Linear and nonlinear	☐	Presentation of content	☐	Representations	☐
				Applications	☐
				Reasoning and proof	☐

15. Is it possible to solve the equation $2x + 1 = 5x + 7$ by drawing pictures of weights and balance scales? If yes, please demonstrate your solution. If not, please explain the reason.

(Adapted from Li, 2007)

Suggestions:

* The main form was prepared as a booklet.

Appendix 2

Reliability analysis of ACK & APCK tests

ACK test

SUMMARY OF 61 MEASURED PERSON

	TOTAL SCORE	COUNT	MEASURE	MODEL ERROR	INFIT MNSQ	INFIT ZSTD	OUTFIT MNSQ	OUTFIT ZSTD
MEAN	19.1	37.0	-.19	.36	1.03	.1	1.01	.0
S.D.	6.6	.0	.85	.04	.22	1.1	.28	1.1
MAX.	34.0	37.0	1.73	.56	1.76	3.5	1.96	3.3
MIN.	4.0	37.0	-2.58	.33	.64	-2.2	.57	-2.2

REAL RMSE	.38	TRUE SD	.76	SEPARATION 1.99	PERSON RELIABILITY .80
MODEL RMSE	.36	TRUE SD	.77	SEPARATION 2.13	PERSON RELIABILITY .82
S.E. OF PERSON MEAN = .11					

PERSON RAW SCORE-TO-MEASURE CORRELATION = 1.00
CRONBACH ALPHA (KR-20) PERSON RAW SCORE "TEST" RELIABILITY = .11

SUMMARY OF 37 MEASURED ITEM

	TOTAL SCORE	COUNT	MEASURE	MODEL ERROR	INFIT MNSQ	INFIT ZSTD	OUTFIT MNSQ	OUTFIT ZSTD
MEAN	31.5	61.0	.00	.30	1.00	.0	1.01	.0
S.D.	14.9	.0	1.14	.06	.11	.8	.19	.9
MAX.	76.0	61.0	2.28	.44	1.29	2.0	1.48	1.7
MIN.	6.0	61.0	-2.34	.17	.83	-1.9	.71	-1.7

REAL RMSE	.31	TRUE SD	1.09	SEPARATION 3.57	ITEM RELIABILITY .93
MODEL RMSE	.30	TRUE SD	1.10	SEPARATION 3.62	ITEM RELIABILITY .93
S.E. OF ITEM MEAN = .19					

APCK test

SUMMARY OF 61 MEASURED PERSON

	TOTAL SCORE	COUNT	MEASURE	MODEL ERROR	INFIT MNSQ	INFIT ZSTD	OUTFIT MNSQ	OUTFIT ZSTD
MEAN	17.8	28.0	.19	.40	1.03	.1	.98	.0
S.D.	5.9	.0	.97	.06	.24	.9	.29	.8
MAX.	33.0	28.0	3.19	.66	1.64	2.0	1.78	2.3
MIN.	8.0	28.0	-1.41	.37	.52	-1.4	.30	-1.7

REAL RMSE	.43	TRUE SD	.87	SEPARATION 2.01	PERSON RELIABILITY .81
MODEL RMSE	.41	TRUE SD	.88	SEPARATION 2.16	PERSON RELIABILITY .83
S.E. OF PERSON MEAN = .13					

PERSON RAW SCORE-TO-MEASURE CORRELATION = .99
CRONBACH ALPHA (KR-20) PERSON RAW SCORE "TEST" RELIABILITY = .80

SUMMARY OF 28 MEASURED ITEM

	TOTAL SCORE	COUNT	MEASURE	MODEL ERROR	INFIT MNSQ	INFIT ZSTD	OUTFIT MNSQ	OUTFIT ZSTD
MEAN	38.8	61.0	.00	.29	.99	.0	.98	-.1
S.D.	15.9	.0	1.21	.06	.14	1.0	.25	1.0
MAX.	79.0	61.0	3.07	.42	1.28	1.9	1.79	2.3
MIN.	9.0	61.0	-2.15	.17	.65	-2.4	.49	-2.4

REAL RMSE	.30	TRUE SD	1.17	SEPARATION 3.90	ITEM RELIABILITY .94
MODEL RMSE	.29	TRUE SD	1.17	SEPARATION 3.98	ITEM RELIABILITY .94
S.E. OF ITEM MEAN = .23					

Appendix 3

Sample test items

Sample questions for APCK test

10. The teacher Reyhan writes the following inequality on the blackboard and asks her students to find a solution.

$$-x < 7$$

One of her students, Kubra, divides both sides of the inequality by -1 and writes $x > -7$ for the solution. Then, another student asks the reason why the inequality changed direction. How would you respond to this question?

20.

$$\frac{(x+4)}{x+1} = \frac{2x+8}{3x}$$

A student makes the following explanation and solution for the question given above.

"(2x+8) is two times (x+4). Then 3x should be two times of (x+1)"

$$2(x+1) = 3x$$

$$2x + 2 = 3x$$

$$\text{and } 2 = x$$

Which of the following is true about this solution?

a) The strategy used by the student is completely wrong.
b) The student made proportion reverse.
c) The result composes the solution set.
d) Although the strategy is true, it gives a missing solution.
e) The student made a calculation error but reached the correct answer by chance.

/

Sample questions for ACK test

12. Indicate whether each of the following situations can be modeled by an exponential function.

	Yes	No
a) The height h of a ball t seconds after it is thrown into the air.	☐	☐
b) The amount of money A in a bank after w weeks, if each week d zeds are put in the bank.	☐	☐
c) The value V of a car after t years if it depreciates d % per year	☐	☐

(Adopted from TEDS-M project, See Tatto et al., 2008)

13. A = $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ and B=$\begin{pmatrix} m & n \\ k & l \end{pmatrix}$ are two matrixes. Is it true that if AxB=0 then either A=0 or B=0 (0, represents the zero matrix)? Justify your answer.

REDIMAT
Journal of Research in Mathematics Education

Hipatia Press
www.hipatiapress.com

Instructions for authors, subscriptions and further details:

http://redimat.hipatiapress.com

The Exponential Function Meaning in Mathematical Modeling Activities: A Semiotic Approach

Karina Alessandra Pessoa da Silva[1], Lourdes Maria Werle de Almeida[2]

1) Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Brazil
2) Universidade Estadual de Londrina, Brazil

Date of publication: Junio 24th, 2018
Edition period: Junio 2018-Octubre 2018

To cite this article: Silva, K.A.P., & Almeida, L.M.W. (2018). The exponential function meaning in mathematical modeling activities: A semiotic approach. *REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education*, *7*(2), 195-215. doi: 10.4471/redimat.2018.2762

To link this article: http://dx.doi.org/10.4471/redimat.2018.2762

REDIMAT, Vol. 7 No. 2 Junio 2018 pp. 195-215

The Exponential Function Meaning in Mathematical Modeling Activities: A Semiotic Approach

Karina A. Pessoa da Silva
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Lourdes M. Werle de Almeida
Universidade Estadual de Londrina

(*Received: 25 May 2017; Accepted: 24 June 2018;Published: 24 June 2018)*

Abstract

In this article we present a reflection about the meaning attribution to the mathematical object *exponential function* that emerges from two mathematical modeling activities. The theoretical framework of the text contemplates considerations on Mathematical Modeling and elements of semiotics as theorized by Charles Sanders Peirce. The empirical research refers to the development of two modeling activities carried out by different groups of students. We analyzed the interpretant signs produced by students working in groups on two activities. The analysis indicates that exponential function meaning in mathematical modeling activities is associated with the *familiarity* that the interpreter reveals to have in relation to the object; the interpreter's *intention* in signifying the object; the identification, by the interpreter, of the possibility to refer to the object in other circumstances or in future situations; and the *collateral experience* of the interpreter with the object. In addition, the significance of the exponential function in modeling activities is also associated with the specificities of the problem as well as with the pertinent systems of practices and contexts of use of this function.

Keywords: Mathematical modeling, Peirce's semiotics, meaning attribution, exponential function

2018 Hipatia Press
ISSN: 2014-3621
DOI: 10.4471/redimat.2018.2762

REDIMAT, Vol. 7 No. 2 Junio 2018 pp. 195-215

El Significado de la Función Exponencial en Actividades de Modelización Matemática: Un Enfoque Semiótico

Karina A. Pessoa da Silva
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Lourdes M. Werle de Almeida
Universidade Estadual de Londrina

(*Recibido: 25 Mayo 2017; Aceptado: 24 Junio 2018;Publicado: 24 Junio 2018)*

Resumen

En este artículo se presenta una reflexión acerca de la atribución de significado a la función exponencial de objeto matemático que emerge de dos actividades de modelación matemática. El marco teórico se basa en el enfoque de Peirce. La investigación empírica se refiere al desarrollo de dos actividades de modelado llevadas a cabo por diferentes grupos de estudiantes. Se analizan los signos interpretativos producidos por los estudiantes que trabajan en grupo. El análisis indica que el significado de la función exponencial en las actividades de modelización se asocia con la familiaridad que el intérprete tiene en relación con: el objeto, la intención del intérprete de significar el objeto, la identificación de la posibilidad de referirse al objeto en otras circunstancias o en situaciones futuras, y la experiencia colateral del intérprete con el objeto. Además, la importancia de la función exponencial en las actividades de modelización también se asocia con las especificidades del problema, así como con los sistemas pertinentes de prácticas y contextos de uso de esa función.

Palabras clave: Modelización matemática, semiótica Peirceana, atribución de significado, función exponencial

2018 Hipatia Press
ISSN: 2014-3621
DOI: 10.4471/redimat.2018.2762

The discussion about meaning has been recurrent in different areas of knowledge such as philosophy, logic, semiotics, and psychology, among other areas interested in human cognition.

For our study, we take into account the notes that refer to the attribution of meaning in a semiotic sense. Semiotics is the science of signs, the signs of language. In this article we build upon the analysis of the signs to infer about the meaning. In dealing with the analysis of signs we base ourselves on the semiotic theory of Charles Sanders Peirce, particularly on his constructions and arguments about the signs that are created in the minds of students - the interpretants - and the inferences regarding the attribution of meaning, from these signs, to the object.

What, in general terms, is addressed in this text, concerns the search for evidence of the attribution of meaning to the mathematical object exponential function that emerges in the development of two mathematical modeling activities. Thus, the question that guides our research is: *how do the interpreting signs provide indications of attribution of meaning to exponential function in mathematical modeling activities?*

Our reflections are based on the analysis of the interpretants evidenced in the written records and students' speeches in the development of mathematical modeling activities carried out by students working in groups in Mathematical Modeling disciplines in two courses: graduate degree in Mathematics and postgraduate degree in Mathematics Education.

The Meaning in Peirce’s Semiotics

Charles Sanders Peirce (1839-1914) was an American semioticist, philosopher, and mathematician who from 1857 devoted much of his studies to the structuring of signs and their relation to the modes of meaning attribution.

In Peircean semiotics the sign has a triadic nature, being constituted by three components: the sign or representation, object, and interpretant. For Peirce, the object is what the sign refers to. The sign, according to Peirce (1972), has the function of representing an object to someone (an interpreter), creating another sign in someone’s mind. The interpretant is a new sign produced by the interpreter and corresponds to the interpretative effect that the sign produces in the interpreter's mind (Peirce, 1972; Peirce, 2005).

The interpretant, as Santaella (2007, p. 23) claims, corresponds to the "interpretative effect that the sign produces in a real or merely potential mind". In this sense, each sign, in the interpreter's mind, generates an interpretant which, in turn, acts as a *representamen* of a new sign, in a process of generation of interpretants in an *ad infinitum* cycle.

Winfried Nöth and Michael Hoffmann, interpreting the Peircean theory have done some reading on the role of the interpretant in Peirce's Semiotics and confirmed that it is through looking at the interpretant that one can infer about the meaning of an object to the interpreter. According to Nöth (2008), the interpretant corresponds to the meaning of the sign or the interpretation of the sign by the interpreter. Hoffmann (2004, p. 198) claims that the main characteristic of Peirce's Semiotic in the meaning attribution to the objects "is the interpretant role".

The process adopted by Peirce to reconstruct or explain the meaning by means of signs, consists of an established group of conditions towards a given situation in which a definite operation would produce a definite result. Looking at the interpretant based on Peirce's ideas of meaning, Silva & Almeida (2015), going through different studies on Peirce and his interpreters, concluded that evidence of attribution of meaning may be: the *familiarity* that the interpreter reveals to have in relation to the object; the interpreter's *intention* in signifying the object; the identification, by the interpreter, of the possibility to refer to the object in other circumstances or in future situations; and the *collateral experience* of the interpreter with the object.

With regard to mathematics in particular, Wilhelmi, Godino & Lacasta (2007, p. 76), claim that the "meaning of a mathematical object is inseparable from the pertinent systems of practices and contexts of use of this object". In this way the meaning of a mathematical object is related to the activity in which this object is mentioned or is used. In this article we direct our attention to the meaning of mathematical objects in mathematical modeling activities.

Mathematical Modeling in Mathematics Education

Although different conceptualizations of mathematical modeling can be recognized, according to Blum (2002), when a mathematical modeling activity is developed it is important to consider a problem of reality as a starting point, by setting the activity as something in which

> The starting point is normally a certain situation in the real world. Simplifying it, structuring it and making it more precise – according to the problem solver's knowledge and interests – leads to the formulation of a problem and to a real model of the situation. […]. If appropriate, real data are collected in order to provide more information about the situation at one's disposal. If possible and adequate, this real model – still a part of the real world in our sense – is mathematised, that is the objects, data, relations and conditions involved in it are translated into mathematics, resulting in a mathematical model of the original situation. Now mathematical methods come into play, and are used to derive mathematical results. These have to be re-translated into the real world, that is interpreted in relation to the original situation. At the same time the problem solver validates the model by checking whether the problem solution obtained by interpreting the mathematical results is appropriate and reasonable for his or her purposes. If need be (and more often than not this is the case in 'really real' problem solving processes), the whole process has to be repeated with a modified or a totally different model. At the end, the obtained solution of the original real world problem is stated and communicated (Blum, 2002, p. 152-153).

To this structure of a mathematical modeling activity, Blum (2015) associates a schema, a cycle of mathematical modeling as indicated in figure 1.

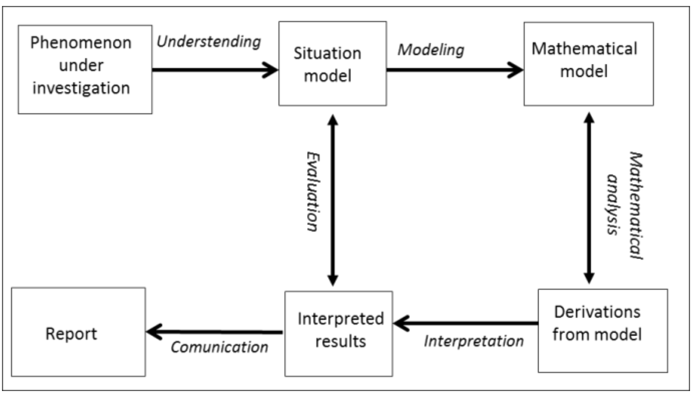

Figure 1. Modeling schema. Source: Blum (2015, p. 77).

Stillman, Brown & Geiger (2015, p. 95-96), also aligned with the development of an activity that follows this schema, consider that two essentially distinct aspects are relevant:

> The mathematical domain includes the mathematical model made of the situation, mathematical questions posed and mathematical artefacts (e.g., graphs and tables) used in solving the mathematical model. Mathematical outputs (i.e., answers) have then to be interpreted in terms of the idealised situation and the real situation that stimulated the modelling (i.e., back into the extra-mathematical domain). These outputs can then answer questions posed about the real situation or, if they are inadequate for this purpose, stimulate further modelling.

As used in this paper, a mathematical model comprises "systems of elements, operations, relationships, and rules that can be used to describe, explain, or predict the behavior of some other familiar system" (Doerr & English, 2003, p. 112).

The introduction and use of the mathematical modeling in different levels of schooling and in different courses and subjects refers to the usage, application, and learning of Mathematics. It is in this use or application of Mathematics that the signs have an important role. In fact, signs are the means of access to mathematical objects and they indicate the attribution of meaning, whether for mathematics itself or for the phenomenon under study.

An important aspect for a teaching methodology to use modeling in the classroom is to orient a class management that considers that the group work is particularly suitable. The group is not only a social but also a cognitive environment (a co-constructive group work) (Blum, 2015).

In this way, if students engage actively in modeling and do it in groups, we have to consider that they may use or produce signs within these groups. From this point of view, we may not ignore that communication and meaning attribution are always intertwined and mediated by the signs they produce within these groups.

In this article we addressed our analyses about meaning attribution to the mathematical object *exponential function* performed by students when they are involved in two mathematical modeling activities developed by small groups of students.

Methods

In order to investigate how the signs provide indications of meaning attribution for exponential function in mathematical modeling activities, we articulate aspects from the presented theoretical framework and empirical data. We analyzed the development of two activities carried out in Mathematical Modeling disciplines of two different courses. Both courses were offered by a Brazilian public university, and contain the subject of mathematical modeling in their curriculum.

The first activity, *concentration of calcium in the river substrate according to the river depth*, was developed by 20 students (11 males and 9 females) of the 4th year of a Degree in Mathematics. The students developed this activity in small groups (pairs) in a period of four class hours that is, 200 minutes, in 2011. In this article we analyze the development of one of these pairs.

The second activity, *the evolution of consumption of cigarettes per inhabitant in the world*, was developed by 11 students (9 males and 2 females) of a Mathematics Education postgraduate course. In this case, four doubles and one trio of students developed the activity during about 100 minutes in 2012. We analyzed the development of the activity by one of these pairs.

One student, Paul was a member of both referred to courses and he is a member of the two groups whose signs we analyzed in this article. The activities were developed under the coordination / supervision of the authors of this article.

Information about the problem situations to be investigated by the students in pairs or trios was provided by the teachers, and the students carried out all the other procedures as indicated in the modeling schema presented in the previous section.

The investigation falls within the methodology of qualitative research. In qualitative research, observations, document analysis, and interviewing are the major sources of data for understanding the phenomenon under study (Bogdan & Biklen, 2003; Lesh, 2002). In the scope of qualitative research, Lesh (2002) characterizes the Research Experiment. According to Lesh (2002, p. 29), a Research Experiment “involves new ways of thinking about the nature of students developing mathematical knowledge and abilities”. In this paper we use this approach, particularly, for the analysis of the signs used and produced by the students throughout the development of the mathematical modeling activities. The data were collected by means of written files, video recording, audio files, and interviewing.

Our inferences about meaning attribution to exponential function are based on the signs and interpretant signs produced by the students of the two groups analyzed.

The modeling Activities and Discussion about Meaning

The First Activity: Concentration of Calcium in the River Substrate According to the River Depth

This activity was developed by 20 students of the 4th year of a Degree in Mathematics. To investigate the meaning attribution to exponential function within this activity we present in this article the analysis of the activity development carried out by one of the groups to which we referred in the previous section. We consider the pair of students Paul and Mary and the signs they used and produced throughout the activity development.

In order to develop this activity in the classroom the teacher provided the students with information about the problem situation as indicated in Table 1 and Figure 2. To investigate the relationship between calcium concentration and phytoplankton production, the students performed a preliminary research on internet sites and books on the area. What the students learned from their research is that phytoplankton production requires a calcium concentration of 150mg / L, or 0.15mg / cm^3.

Table 1.
Calcium concentration in the Limoeiro river

River depth (cm)	Calcium concentration in the substrate (mg/cm^3)
30	2.958
90	2.316
150	1.641
210	1.264
270	0.893
330	0.697

Source: Borssoi, 2004

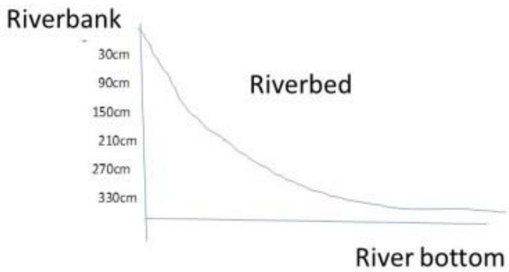

Figure 2. Graphical representation of the Limoeiro river depth

Paul and Mary considered the data provided by the teacher on the concentration of calcium in the river and the information they had obtained from their research. During the *Understanding* stage referred to in the modeling schema of Figure 1, what the two students wanted to understand and mathematize is the relationship between the depth of the river and the possibility of phytoplankton production according to these river depths. Particularly, the pair wanted to determine the maximum depth of the river at which phytoplankton production may still occur.

Initially, Paul and Mary noted that in Table 1 the information indicates that the calcium concentration decreases as the river depth increases. However, what seems to have been relevant to mathematize this decrease was the image in Figure 2. In fact, when the students were asked in an interview why they thought of exponential function in this modeling activity, one of the answers was:

> Mary: The figure of the river helped us to think of what mathematics we could use. We think it looks like exponential behavior because we already know the graph of this kind of function.

Thus, there seems to be an indication that Figure 2[1], in turn, led Paul and Mary to ponder that the decrease in the amount of calcium may have an exponential behavior. Therefore, it is a sign from which other signs are being produced by the students to refer to the exponential function. In this sense, we can consider that the exponential function corresponds, at this moment, to the interpretative effect that the sign produces in a real or merely potential mind, as claimed by Santaella (2007).

Other interpretants produced by the students to mathematize this exponential decrease had the purpose of obtaining the mathematical model associated to this exponential decay. Considering that both Figure 2 and Table 1 represent information on the problem, the pair of students seeks to identify characteristics of an exponential behavior in the data of the table. In the interview, Mary explains how they conducted their actions to model the situation.

> Mary: So we thought about what mathematics we should use ... We ended up taking an approach that started with an analysis of the data in Table 1 and from there we made the definition of the hypothesis for the relationship between the depth of the river and the amount of calcium.

This explanation from Mary refers to the procedure performed by the students and indicated in Figure 3.

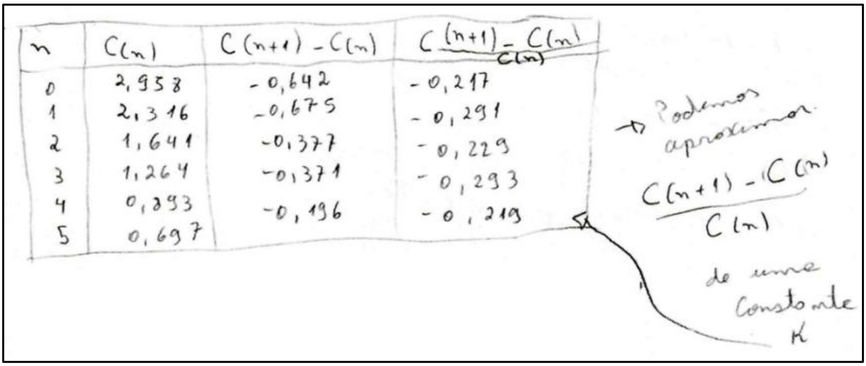

Figure 3. Hypothesis defined by Paul and Mary from analysis of the data in the table[2]

> Paul: Well ... we used a hypothesis that led us to solve an ODE.
>
> Professor: For this did you consider a rate of change?
>
> Paul: Yes... what we already knew of variation in quantities over time.

From the calculus performed by the students, as shown by Figure 3, the students defined the hypothesis that the rate of change of the calcium concentration in the substrate in relation to the river depth is proportional to the calcium concentration. This can be expressed by a first-order ordinary differential equation, indicated by dC/dp=$k \cdot C$ in which *p* is the river depth (in cm) and C(*p*) the calcium concentration (in mg/cm3) according to the depth *p*. To solve this ODE, Paul searched for help in his class notes and said to Mary:

> Paul: Mary, look [holding a note sheet] we have solved a differential equation just like this one in previous classes. Therefore, we know we'll get to an exponential model!

Paul's statement seems to be an indication of collateral experience with the object exponential function in other learning situations and so it is evidence of meaning attribution to exponential function, as Peircean semiotics establishes. The new signs produced by students make reference to the signs Table 1 and Figure 2 and they highlight the mathematical object that comes up in this modeling activity. These new signs are interpretants signs and they are, at this time, the idea that the interpreters (Paul and Mary) had from the original sign.

Analyzing the images captured by video, it is evident that Paul and Mary look for some kind of protocol in their notes to develop the activity using ODE. In this context, Manechine & Caldeira (2006, p. 3) claim that in the school context, "as the student becomes familiarized and learns certain universal signs, these become reference objects to the connection, relationship, and appropriation of new signs". In this case, the development of the 1st order separable ODE corresponds to a reference object to obtain the exponential model. In fact, the solution obtained by the students to the exponential function is $C(p) = \beta.e^{kp}$, as shown in Figure 4.

To determine parameters β and k of $C(p)$, Paul and Mary used two mathematical procedures. First they chose two points from Table 1.The choice of the points was performed by running experiments and validating them during an exhausting process that can be visualized in the video recording in which the students run calculus using the calculator and erase times in a row, arriving at Model I represented by $C(p) = 3{,}3443\,.e^{-0{,}004083p}$ as shown in Figure 5. In the interview Mary affirms:

> Mary: We knew that with two points it would be possible to determine the value of the parameters. Our question was which points in Table 1 we should choose.

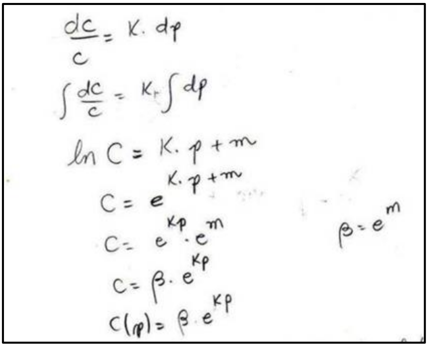

Figure 4. Signs produced in mathematization with ODE

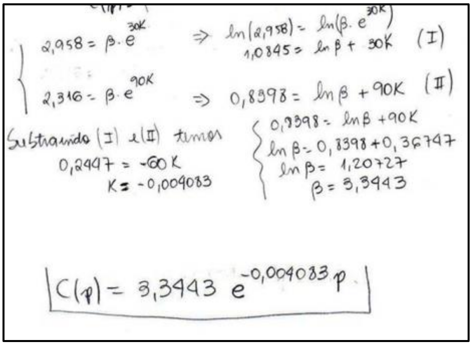

Figure 5. Signs produced to determine β and k in Model I[3]

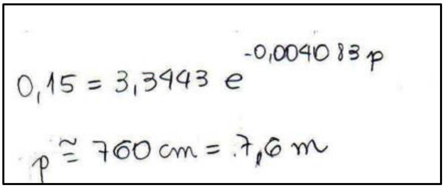

Figure 6. Solution to the problem using Model I

It is important to consider that in the activity the model obtained is not yet the solution to the problem that the activity was proposed to investigate. In fact, to determine the maximum depth of the river that still allows phytoplankton production, it was necessary to match the depth of the river to the minimum concentration of calcium that still allows this production (0.15 mg / cm^3). Thus, what Paul and Mary did with the obtained model was: $3.3443.e^{-0.004083p} = 0.15$. Thus the students obtained the answer *.p = 7.6m* as shown in Figure 6.

In the second approach Paul and Mary used the Least Squares Method (LSM), as shown Figure 7, to obtain *k* and β and obtained the mathematical model $C(p) = 4.047016e^{-0.0049270p}$ (Model II).

In this case, to determine the maximum depth of the river that still allows phytoplankton production, the equality resolved was $4.047016e^{-0,0049270p} = 0.15$, which shows that, according to this approach, the maximum depth is *p = 6.688m.*

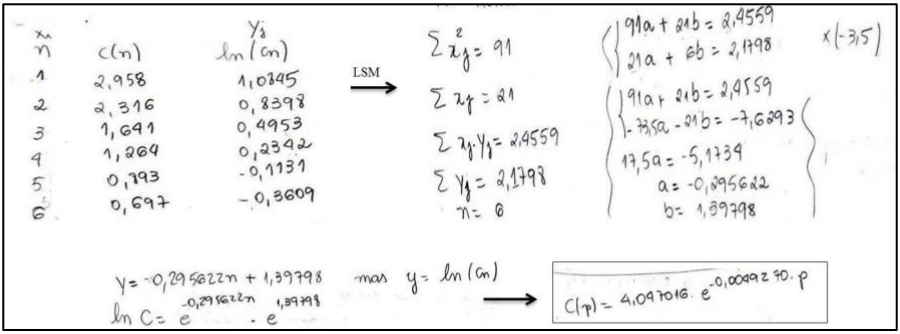

Figure 7. Signs produced to obtain Model II using the LSM

When asked, during interview, about this second resolution using the least squares method, Paul justifies:

> Paul: Well… firstly we solved the ODE equation and for that we used only two points to obtain the parameters. But we also wanted to use a method in which we could use all the points …Then, we came up with the least squares method. In fact, the least squares method you use to find a function or curve that best fits a set of points. And then we could use our set of points.

What is evident in these statements of the students is that they recognize in different signs the same mathematical object: the exponential function. This denotes that Mary and Paul are becoming familiar with the mathematical object exponential function. Thus, according to Peirce's assertions which we have already discussed, we have indications of attribution of meaning.

In the interview, when we asked Paul why they (Paul and Mary) were concerned with presenting the two models (Model I and Model II), he pondered that:

> Paul: Our models are different, but they are close to what we think about the behavior of calcium in the river, which decreases with the depth of the river. The exponential function in both models indicates this.

Paul's assertion is an indication that the attribution of meaning in this activity is also imbued with a student's intention to signify the exponential function object.

The Second Activity: The Evolution of Consumption of Cigarettes per Inhabitant in the World

This second activity was developed by 11 students of a Mathematics Education postgraduate course. In this case, four doubles and one trio of students developed the activity. We analyzed the development of the activity by one of these pairs, Paul and Carl.

In order to develop this activity in the classroom the teacher provided the students with information about the problem situation as indicated in Figure 8. This figure made it possible to see the evolution of per capita consumption of cigarettes per inhabitant in the world from 1950 to 2007. In 1950 the per capita consumption was 702 cigarettes a year; and in 1990 this consumption reached 1062 cigarettes per year; but then began to decline, reaching 844 cigarettes in the year 2007.

What the student proposed to study in this activity is: considering the decrease in cigarette consumption after the year 1990, could consumption be reduced again to reach the 702 cigarettes consumed per person, as it was in 1950?

From the mathematical point of view, the first problem of the student in this case is that from the data of the magazine from the year 1950 to 2000 the consumption was presented every 10 years. However, this does not happen in the final period in which the reported consumption is the year 2007 rather than 2010. Thus, the students used the hypothesis that from the year 2007 the consumption would continue to decrease and then determined the consumption in 2010.

The prediction of cigarette consumption for the year 2010 was made by the student from the observation that between 1990 and 2000 the decrease in annual cigarette consumption per person corresponds to approximately 13.75%; while for the period from 2000 to 2007, the percentage is reduced to 7.86%. Considering the hypothesis that the decrease of 7.86% in the final period was equally distributed among the seven years, they could consider that consumption decreased by 1.12% per year in this period. Assuming that this percentage was maintained between 2007 and 2010, they concluded that the number of cigarettes consumed per person in 2010 was 813 cigarettes, as indicated in the last line of Table 2.

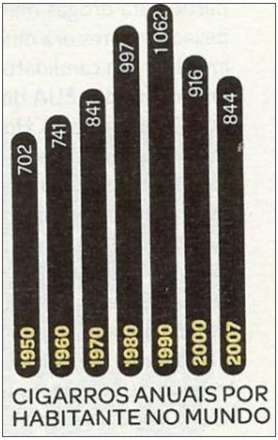

Figure 8. World cigarette consumption. Source: Super Interessante Magazine, August 2009, p. 35.

Table 2.
Number of cigarettes consumed per year per person

Year (t)	Number of cigarettes
1950	702
1960	741
1970	841
1980	997
1990	1062
2000	916
2010	813

In this activity the information provided by the teacher was not insufficient. The understanding process, as the modeling schema indicates, requires students to supplement this information so that the next step of the schema, modeling can be initiated.

This complementation of the data, producing the number of cigarettes consumed per person in the year 2010, is already indicative of the hypothesis that pervades the modeling of the students. In fact, the hypothesis that it is a decreasing phenomenon is already incorporated. What would be a problem for these students is determining in which year the consumption of cigarettes would again reach 702 cigarettes per person per year.

In order to continue their procedures, Paul and Carl produced a new sign from table 2. This is an interpretive sign that expresses the students' understanding of the situation (Figure 9). This interpretation of the students is an indication that “modeling activity allows the organization and elaboration of signs, i.e., the generalization of knowledge by semiotic representations and its interpretation” (Almeida, 2010, p. 409).

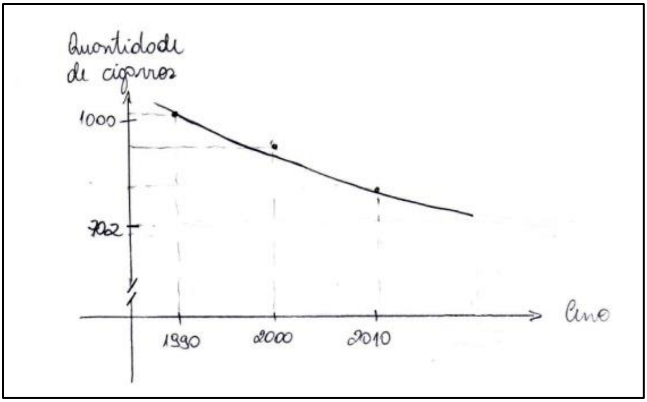

Figure 9. Graph produced by the students[4]

When the students were asked about the construction of this interpretant sign, they gave good explanations.

> Paul: The graph is important! I think it is interesting you see at each point what is happening. Because we - I do not know if I can generalize - we really needed to see the result, to view it in some way, i.e., how this is happening, you have something more visible. I think the graph somehow makes this possible…the behavior, because you say 'Oh! There is that point there, it seemed to be somewhat discrepant, what is happening?’ good, but at that point this is happening. The graph allows you to explore more data. I think it helps a lot in this sense [to see the data behavior].

> Carl: And also with the graph we were convinced that the decline could not be linear. And that's why we thought the exponential function would be the best in this case.

The fact the students used the graph to represent the data indicates a familiarity with the handling of this sign, particularly the need '*to see at every point what's going on*'. According to Peirce (2005, p. 164), it is "the familiarity that a person has with a sign that makes this person able to use it or interpret it". Accordingly, we can infer that for Paul and Carl the table and graph are interrelated to characterize the mathematical object that emerges in the activity development.

'Observando os pontos da tabela 1 no plano cartesiano, supomos que um modelo do tipo exponencial modelaria melhor a situação.

(Looking at the points in table 1 in the graph we can assume that an exponential model can be used to represent the situation)

$N(t) = k \cdot a^t$, com a $0 < a < 1$

$1062 = k \cdot a^{1990} \Rightarrow k = \dfrac{1062}{a^{1990}}$

$916 = k \cdot a^{2000}$

$916 = 1062 \cdot \dfrac{a^{2000}}{a^{1990}}$

$916 = 1062 \cdot a^{10}$

$a^{10} = 0,8625$

$a = 0,9853$

$916 = k \cdot (0,9853)^{2000}$

$\log(916) = \log k + 2000 \log(0,9853)$

$\log k = 15,8249$

$k = 10^{15,8249}$

$\boxed{N(t) = 10^{15,8249} \cdot (0,9853)^t}$

Figure 10. Mathematical model obtained by the students

In this case the students considered the graphical representation in Figure 9 to assume the hypothesis that an exponential function could be associated with the decrease in the number of cigarettes consumed per year per person. Figure 9 becomes a sign for future referrals in the development of the activity. In fact, interpretive signs are constructed to solve the problem.

To obtain the model in this situation the students start from the general form of the exponential function $N(t) = ka^t$, where t is the time in years; N(t) represents the number of cigarettes consumed according to time; and k and a correspond to parameters to be obtained. To determine the values of k and a the students choose the points (1990, 1062) and (2000, 916) in Table 2 to obtain the model as shown in Figure 10.

The choice of the two points was justified by the students:

> Carl: It is simple to deduce the mathematical model using two points. This is what we use with students in basic education. We wanted to do it in a way that could be done with our future students.
>
> Paul: Well ... I know I could have used ODE, and the least squares method, but thinking about my future professional activity as a high school teacher, and the possibility of introducing this activity in my classes, I thought choosing two points would suffice. In addition, the validation of the model performed indicates that the model is adequate.

Two aspects are relevant in this assertion from Carl. First, it seems that we can recognize here the identification, by the interpreter, of the possibility to refer to the object in other circumstances or in future situations. In fact, as a teacher in training, Carl associated his action with his future professional activity. Moreover, the assignment of meaning in this case seems to be associated with the fact that the "meaning of a mathematical object is inseparable from the pertinent systems of practices and contexts of use of this object" (Wilhelmi, Godino, & Lacasta, 2007, p. 76). In fact, these student procedures are indicative that the meaning attribution to the exponential function may be associated with student's educational and professional context: a student of a postgraduate course in the area of Mathematics Education and a secondary school teacher.

In order to obtain a solution to the problem, which is to determine the year in which the number of cigarettes consumed per person reaches that of 1950, that is, 702 cigarettes, Paul uses the deduced model $N(t) = 10^{15,8249}(0.9853)^t$, and he calculates $10^{15,8249}(0.9853)^t = 702$. From this it follows that the number of cigarettes consumed per year will again be 702 cigarettes per person in the year 2018, according to the procedures of the student in Figure 11.

$$N(t) = 702$$
$$702 = 10^{15,8249} \cdot (0,9853)^t$$
$$\frac{702}{10^{15,8249}} = (0,9853)^t$$
$$\log(702) - \log(10^{15,8249}) = t \cdot \log(0,9853)$$
$$t \simeq 2017,9$$
$$t \simeq 2018.$$

Figure 11. Resolution of the problem in the activity on cigarette consumption

The meaning of the exponential function in this case seems to be being awarded in the course of the interrelationship between the graph, table, and the students' collateral experience with the sign.

When asked to justify the use of the exponential model for this situation Paul argues that:

> Paul: We knew the function must be decreasing. We even thought of doing a linear fit, but a linear function could have negative values and this is not true for the situation of smoking. Besides this, with the exponential function we had guaranteed it would be even positive and so, asymptotic, but we did not know if this asymptote would be greater or less than 702; the table data, however, indicate that it certainly would be less than 702. We also had to take into consideration the fact that the function was decreasing and guarantee that parameter a must be between zero and one.

Paul's arguments provide indicative attribution of meaning to exponential function. In fact, Paul's statement is an interpretant sign that reveals his understanding of exponential function characteristics considering his different representations (table, graph, and algebra). It is in this sense that the statement of Peirce (2005, p. 222) that "meaning interpreted meaning of a sign" could be observed.

Discussion and Results

Analysis of the signs produced by the students in the development of the two activities allows us to have indications of how the interpretive signs provide indications of meaning assignment for exponential function in mathematical modeling activities. In our research we consider the thoughts of Santaella (2007, p. 37), that "the analysis of the interpretants must be based on the careful reading of both the aspects involved in the foundation of the sign and in the aspects involved in the relations of the sign with its object".

When studying calcium concentration in the Limoeiro River, the *understanding* of the phenomenon investigated, to a certain extent, is guided by the students' analysis of the data provided by the teacher. This action makes possible the production of signs from which the modeling arises, aiming at the construction of the mathematical model. The stage of mathematical analysis referred to in the Blum schema (2015) in this case is what gave the students the solution to the proposed problem.

The interpreting signs are being produced by the students with the intention of obtaining the solution. The meaning for the exponential function has been constructed to the extent that different methods and procedures are used to understand the phenomenon through an exponential function.

Collateral experience and familiarity are articulated in the development of the modeling activity, since there is an intention to obtain a "better" mathematical model to solve the studied problem. For each mathematical model deduced, the students perform *mathematical analysis* to obtain a solution interpreted with the phenomenon.

In the activity of the analysis of the consumption of cigarettes the route taken by the students was guided only by information given to them by the teacher. In this case, the steps *Understanding and Modeling* of the schema were those that required the most effort from the students. In fact, Table 2 and Figure 10 are interpretive signs produced by the students from which the meaning for the exponential function would be consolidated for these students.

In this case the interaction between the pairs of students in the development of the activities was fundamental so that the appropriate signs were produced by the students. It is precisely in this sense that "a sign is only a sign because it is interpreted by somebody, by the interpreter and it creates a new sign in their mind, the *interpretant*, which is in reality the idea that the interpreter had of the original sign" (Miskulin et al, 2007, p. 5).

We can conclude that from a mathematical point of view the meaning attribution to the exponential function is also associated with the specificities of the activity. In each activity obtaining the exponential function was oriented by specific characteristics of the problem under study. In the case of the calcium concentration of the Limoeiro River, the exponential function was found as the solution of an ordinary differential equation. In the case of the reduction in the annual number of cigarettes, the representation of the data in the Cartesian plane is what led to the formulation of the hypothesis that the decrease could be exponential.

Thus, particular conditions in each case directed construction of interpretant signs, in line with that considered by Wilhelmi, Godino & Lacasta (2007, p. 76); “the meaning of the mathematical object is inseparable from the pertinent systems of practices and contexts of use”.

In both activities the evidence of meaning attribution also reflects familiarity with the object, the intention to signify the object, and the collateral experience with the object, according to Peirce's considerations concerning the meaning revealed in the interpretant signs.

What the analysis of the two activities also indicates is that, although the phenomena studied in the two activities are different, the data present the same behavior. Thus, producing mathematical models for the two situations considering the specificities of each one, is an indication of what Perrenet & Zwaneveld (2012) point out in relation to the fact that in modeling activities the mathematics is 'only' a part of the whole process.

Notas

[1] These data were collected in a previous research and are reported in Borssoi (2004).
[2] In this figure, performed by Brazilian students, the expression ‘Podemos aproximar C_{n+1}-$C_{n'}/C_n$ de uma constante k’ is translated as: ‘We can approximate C_{n+1}-C_n/C_n of a constant k’.
[3] In this figure, performed by Brazilian students, the expression 'subtraindo I e II temos’ is translated as: ‘subtracting I and II, we can write’.
[4] In this figure, performed by Brazilian students, the expression ‘Quantidade de cigarros’ is translated as: ‘Quantity of cigarettes’. The word 'ano' is translated as ‘year’.

References

Almeida, L. M. W. (2010). Um olhar semiótico sobre modelos e modelagem: Metáforas como foco de análise. *Zetetiké, 18* (número temático), 387-414.

Blum, W. (2002). ICMI study 14: Application and modelling in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 51*(1/2), 149-171. Doi: 10.1023/A:1022435827400

Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*: Intellectual and Attitudinal Changes (pp. 73–96). New York: Springer.

Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (2003). *Qualitative research for education*: *An introduction to theories and methods* (4 ed.). New York: Pearson Education.

Borssoi, A. H. (2004). *A aprendizagem significativa em atividades de Modelagem Matemática como estratégia de ensino*. Masters Dissertation (Post-Graduation in Teaching of Science and Mathematics Education) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, Brazil.

Doerr, H. M.& English. L. D. A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. *Journal of Research in Mathematics Education*, *34*(2), 110-136. Doi: https://www.jstor.org/stable/30034902

Hoffmann, M. H. G. (2004). Learning by developing knowledge networks. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *36*(6), 196-205.

Lesh, R. (2002). Research design in mathematics education: Focusing on design experiments. In L. D. English (Ed.). *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 27–49). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Manechine, S. R. S., & Caldeira, A. M. A. (2006). A significação e ressignificação da linguagem gráfica na compreensão de fenômenos naturais. *SIPEM*, *3*, 1-16.

Miskulin, R. G. S., Mendes, R. M., Farias, M. M. R., Moura, A. R. L., & Silva, M. R. C. (2007). A semiótica como campo de análise para as representações de conceitos matemáticos. *Cadernos de Semiótica Aplicada*, *5*(2), 1-18.

Nöth, W. (2008). *Panorama da semiótica*: *de Platão a Peirce*. São Paulo: Annablume.

Peirce, C. S. (1972). *Semiótica e Filosofia: Textos Escolhidos*. São Paulo: Cultrix.

Peirce, C. S. (2005). *Semiótica*. São Paulo: Perspectiva.

Perrenet, J., & Zwaneveld, B. (2012). The Many Faces of the Mathematical Modeling Cycle. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1*(6), 3-21.

Santaella, L. (2007). *Matrizes da Linguagem e Pensamento.* São Paulo: Iluminuras: FAPESP.

Silva, K. A. P.; Almeida, L. M. W. (2015). Caminhos do Significado em Atividades de Modelagem Matemática: Um olhar sobre os interpretantes (Meaning's Routes in Activities of Mathematical Modeling: a look on the interpretants). *Bolema*, *29*(52), 568-592. DOI: 10.1590/1980-4415v29n52a08

Stillman**,** G. A., Brown, J. P., & Geiger, V. (2015). Facilitating mathematisation in modelling by beginning modellers in secondary school. In G. A. Stillman, W. Blum, & M. S. Biembengut (Eds.). *Mathematical Modelling in Education Research and Practice*: *Cultural, Social and Cognitive Influences* (pp. 93–104). New York: Springer.

Wilhelmi, M. R., Godino, J. D., & Lacasta, E. (2007). Didactic effectiveness of mathematical definitions: the case of the absolute value. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *2*(2), 73-90.

Karina Alessandra Pessoa da Silva is associated professor at the Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Brazil.

Lourdes Maria Werle de Almeida is associated professor in mathematics education at the Universidade Estadual de Londrina, Brazil.

Contact Address: Direct correspondence concerning this article, should be addressed to the author. Postal address: Universidade Tecnológica Federal do Parana, Av/ Sete de Setembro, 3165 – Rebouças CEP 80230-901 – Curitiba - PR (Brazil). **Email**: karinapessoa@gmail.com

The Mathematics of Mathematics. Thinking with the Late, Spinozist Vygotsky

Vladia Ionescu[1]

1) Universitat de Barcelona, Spain.

Date of publication: February 24th, 2018
Edition period: February 2018-June 2018

To cite this article: Ionescu, V. (2018). The mathematics of mathematics. Thinking with the late, Spinozist Vygotsky [Review]. *REDIMAT*, *7*(2), 216-218. doi: 10.4471/redimat.2018.3590

To link this article: http://dx.doi.org/10.4471/redimat.2018.3590

REDIMAT, Vol. 7 No. 2 June 24th 2018 pp. 216-218

Review

Roth, W-M. (2017). *The Mathematics of Mathematics. Thinking with the Late, Spinozist Vygotsky*. Dordrecht, The Netherlands: Springer.

U In the preface, Wolff-Michael Roth presents us Lev Vygotsky as the psychologist that had influenced theories of learning and development but who had also recognized that his theories must be reviewed. Willing to do so, Vygotsky remembered philosopher Spinoza and agreed with the idea of the existence of a unique substance, the thinking body, that has different ways to turn out. To get even further, Vygotsky applied Karl Marx principles learned from "The German Ideology", in which theories went around the idea of "the primacy of societal relations" that makes the difference between humans and other species. Combining Spinoza and Marx through Vygotsky's unfinished and unrevised theories led the author to write "The Mathematics of Mathematics" and see where Vygotsky's last work could imply for mathematics education.

Wolff-Michael Roth divides the book in ten chapters. The first one, "Vygotsky's Marxist-Spinozist Re/Orientations", the author describes how Baruch Spinoza and Karl Marx's works influenced the final work of Vygotsky. In his "Ethics", Spinoza wrote that mind as thought and body as extension were the same thing, meaning that they are attributes of the substance. To understand this idea, different illustrations appear in the chapter, demonstrating that you can see the image as one (the rabbit) or the other (the duck), but not both at the same time. In "The German Ideology", Marx delved into how mathematics becomes individual when children are aware how they relate with others.

The second one, "The Thinking Body", readers are able to differentiate between the classical approaches of the mathematical thinking regarding the individual mind and the individual body and to conclude that Vygotsky overcomes them through the Spinozist-Marxian lens. The third one, "The Mathematics of Mathematics" applies to the social role of mathematics by understanding what students do as a social construction, which is the same as understanding a person as a social unit, a part of a specific societal group.

In the fourth chapter, the author illustrates what Vygotsky calls “sociogenesis” or what happens when mathematical reasoning is used for the first time by someone in the relation to another person. To show these findings, the author uses different figures illustrating children in their mathematics’ interactions.

Chapter five links the material and the ideal physical world by bridging the gap among different speakers when the author introduces the idea of mediation and mediators. “Experiencing Mathematics” or *Pereživanie* define person and environment as “parts of the same system”, both united in one substance. When linked to a maths classroom, any performance carried out needs to be considered one single unit – “person-acting-in-environment” –.

Chapter six (Affect and emotion) and seven (teaching/Learning) present activities in class: first, a case study of affect in Mathematics to illustrate how children react when they are hand over a task and which relations are built among them and second, how kids interact under the teacher’s instructions. In chapter nine, Mathematics in the Drama of Life, the author intends to understand mathematics and how we apply them to solve situation that we must manage. To explain it, Wolff-Michael Roth appeals to the research his team and himself carried out in a fish hatchery and what he found out from the mentor–mentee relation of two of the workers.

The last chapter “Overcoming Dualism”, we finally overcome “the traditional dichotomy of body and mind” from the beginning.

The author provides mathematics educators a first sight of the Marxist reading and re-articulation of the Spinozist idea of the substance. Educators can avoid the dualist theory and use this book as a tool to improve their teaching methods and the way students learn. The importance of overcoming the traditional dualism that Wolff-Michael Roth presents in his work, based on reviewing theories of the great philosophers, implies assuming new methods of understanding how we know, learn and develop during our lifetime and how to do it through mathematics.

Reviewing traditional theories that worked years ago helps teachers and educators to understand and to support their students with updated methods. Mind and body as one, understanding the classroom as part of the learning process and accepting emotion as part of it, among others, provide new ways to see how mathematics are part of our existence. Thus, educators manage the *how to* teach mathematics and students the *why* of the usefulness of mathematics.

Vladia Ionescu, Universitat de Barcelona
vladia.ionescu@gmail.com