REDIMAT
Journal of Research in Mathematics Education

Hipatia Press
www.hipatiapress.com

Volume 6, Number 3

Hipatia Press
www.hipatiapress.com

Editorial



Articles



Reviews

Instructions for authors, subscriptions and further details:

http://redimat.hipatiapress.com

# Editorial

Javier Díez-Palomar[1]

1) Universidad de Barcelona. España.

Date of publication: October 24th, 2017
Edition period: October 2017-February 2018

**To cite this article:** Díez-Palomar, J. (2017). Editorial. *REDIMAT*, *Vol 6*(3), 224-227. doi: 10.4471/redimat.2017.3072

**To link this article:** http://dx.doi.org/10.4471/redimat.2017.3072

*REDIMAT, Vol. 6 No. 3 October 2017 pp. 224-227*

# Editorial

Javier Díez-Palomar
*Universidad de Barcelona*

Me complace presentar el último número del sexto volumen de REDIMAT. En este número ofrecemos algunos temas comunes que aparecen en varios de los artículos que se publican. Por un lado, está el tema de la resolución de problemas, que es uno de los cinco procesos matemáticos estándar identificados por el NCTM (2000) hace ya casi veinte años. La resolución de problemas siempre ha sido uno de los grandes pilares del aprendizaje de las matemáticas, porque implica, entre otras cosas, saber integrar de manera coherente y con comprensión objetos, definiciones, representaciones matemáticas y saber usar esas configuraciones para encontrar respuestas correctas al problema dado. Por otro lado, otro aspecto que aparece en varios de los artículos incluidos en este número es el libro de texto. Sobre él se ha escrito muchas veces, a favor y en contra. Hay maestros/as que deciden no usar libro de texto, mientras que hay otros/as que lo utilizan como piedra angular de sus clases. Algunas familias lo echan de menos, sobre todo cuando no tienen referentes a los que recurrir para ayudar a sus hijos/as con los deberes, o no pueden acceder a las fichas que reparte el maestro/a en clase. Después está todo el debate sobre las editoriales y el papel que juegan alrededor del libro de texto. Por eso, tener más investigación que nos aporte criterios para juzgar con acierto y conocimiento de la materia el contenido del libro de texto siempre supone un aspecto interesante desde el punto de vista profesional, tanto des de la formación del maestro/a, como del disponer de referentes claros para tener un criterio crítico (en el sentido de informado). Además de esto, en este número de REDIMAT incluimos dos artículos que giran en torno a la *Teoría Antropológica de lo Didáctico* (TAD), que es un enfoque que se centra en la actividad matemática, o como decía Chevallard (1999), en la actividad de estudio de la matemática, es decir, en el conjunto de la actividad humana y de las instituciones sociales.

El primero de los artículos de este número se centra justamente en el análisis de la resolución de problemas a partir del libro de texto. En este artículo, Amiripour, Dossey y Shahvarani estudian libros de texto iraníes prestando atención a lo que ellos denominan como *problem pattern*. La investigación previa muestra que los niños y las niñas con dificultades en el aprendizaje de las matemáticas suelen "buscar" esquemas (o tipologías de problemas) que usan para identificarlos y saber, de ese modo, cómo proceder para encontrar la respuesta correcta. Los autores del artículo centran su trabajo en el colectivo de niños/as "en riesgo", es decir, aquellos/as que mayores dificultades tiene para aprender matemáticas. En los problemas contextualizados en la vida real la dificultad principal, precisamente, es encontrar alguna pista de cómo abordar el problema para poder resolverlo. Partiendo de la hipótesis de los "problemas tipo" que sugiere la literatura previa, los autores plantean que los niños/as que tienen mayores dificultades, les resultará más fácil resolver problemas si responden a un cierto patrón (*problem pattern*). Los autores realizan un estudio con grupo de control y grupo experimental, con conclusiones interesantes y que, creo, tienen mucha utilidad tanto para los/as profesionales ya en servicio, como para futuros/as maestros y maestras.

En el segundo artículo y Villalonga también proponen un estudio sobre resolución de problemas. En este caso el concepto que proponen es la *base de orientación*. En este caso los autores no miran la resolución del problema desde la existencia de un cierto "patrón" (desde el problema en sí); sino que prefieren poner el énfasis en el propio procedimiento de resolución, y por eso hablan de adecuar las orientaciones que se dan al estudiante para que pueda avanzar de manera más firme hacia la resolución del problema. La clave, según los autores, se encuentra en la gestión del "atasco", que no es algo negativo, sino precisamente una oportunidad para encontrar posibles soluciones. Es una “fuente de inspiración”, y, de hecho, Villalonga y Deulofeu identifican hasta seis tipos diferentes de “atasco.” Como es difícil que los propios/as estudiantes se autorregulen, los autores proponen que sea el maestro/a quien proporcione esa base de orientación que permita luego al estudiante progresar y no solo llegar a la respuesta correcta al problema, sino también aprender por el camino. Es una propuesta interesante y con un análisis brillante desde el punto de vista del aula.

En el tercer artículo cambiamos notablemente tanto de registro como de nivel educativo. Lucas, Gascón y Fonseca nos trasladan a la transición entre la secundaria (el bachillerato) y la universidad, en Portugal, y en el dominio del cálculo diferencial elemental. Los autores usan el enfoque de la TAD para analizar tanto libros de texto, como apuntes y exámenes que se utilizan en Portugal (enfoque institucional), para ver cómo aparece planteado el cálculo diferencial elemental. Al hacerlo se dan cuenta que existe una falta de visibilidad escolar de la modelización funcional. A parte de algunos contextos puntuales en los que se pide al estudiante que modelice y cree la función o las funciones que se ajustan a la situación presentada en el contexto (como es el caso de los problemas de optimización, por ejemplo), la mayor parte de las veces se presenta como aplicaciones de nociones estudiadas previamente, de forma mecánica casi siempre, con lo que la propia razón de ser (*raison d'être*) de la inclusión del cálculo diferencial elemental en el currículum de último año de instituto (antes de acceder a la universidad), según los autores, desaparece. En cualquier caso, su reflexión sí que da qué pensar de cómo a veces están construidos los currículums y, sobre todo, los libros de texto o materiales que usan luego los/as docentes en el aula para enseñar matemáticas.

Finalmente, el cuarto de los artículos de esta edición de REDIMAT nos lleva al mundo de las proporciones, de nuevo desde el enfoque de la TAD. Wijayanti y Winsløw prosiguen con el análisis de libros de texto, y de la misma manera que Lucas, Gascón y Fonseca examinaban las ecuaciones diferenciales, ellos lo hacen sobre la proporción (*proportion and ratio*) y sobre el pensamiento proporcional. Utilizando cuatro niveles de lo que denominan codeterminación (disciplina, dominio, sector, y tema), los autores identifican diferentes tipos de tareas que aparecen en los libros de texto analizados (tres libros de texto indonesios), construyendo las diferentes *praxeologías* (T/τ/θ/Θ) inherentes a dichas tareas (en sentido de Chevallard). A pesar de que los propios autores explicitan las limitaciones de su propuesta, es un buen artículo para entender cómo usar el enfoque TAD y el concepto de *praxeología* como herramienta de análisis didáctico para el/a docente.

Animo, pues, a leer detenidamente estos artículos y reflexionar sobre lo que nos aportan para la mejora de nuestra tarea en las aulas.

## Referencias

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des practiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques 19*(2), 221-266.

National Council of Teachers of Mathematics (Ed.). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA.: NCTM.

REDIMAT Journal of Research in Mathematics Education

Hipatia Press
www.hipatiapress.com

Instructions for authors, subscriptions and further details:

http://redimat.hipatiapress.com

# Using a New Schema Approach with Primary at Risk Students in Word Problem Solving

Parvaneh Amiripour[1], John Arthur Dossey[2] and Ahmad Shahvarani[1]

1) Islamic Azad University
2) Illinois State University

Date of publication: October 24th, 2017
Edition period: October 2017-February 2018

**To cite this article:** Amiripour, P, Dossey, J.A., & Shahvarani, A. (2017). Using a new schema approach with primary at-risk students in word problem solving. *REDIMAT*, *6*(3), 228-255. doi: 10.1783/redimat.2017.2612

**To link this article:** http://dx.doi.org/10.17583/redimat.2017.2612

PLEASE SCROLL DOWN FOR ARTICLE

*REDIMAT, Vol. 6 No. 3 October 2017 pp. 228-255*

# Using a New Schema Approach with Primary At-Risk Students in Word Problem Solving

Parvaneh Amiripour
*Islamic Azad University*

John A. Dossey
*Illinois State University*

Ahmad Shahvarani
*Islamic Azad University*

(*Received: 03 March 2017; Accepted: 06 October 2017; Published: 24 October 2017)*

## Abstract

This comparative study of two approaches contrasts a schema-based approach to represent a solution approach to solving whole number contextual problems for grades 2 and 3 with the traditional textbook approach. The participants are 9 to 11-year-old Afghani refugee students enrolled in non-public schools administered by NGO organization in Iran. The subjects have difficulty with grade-level mathematics and have been retained in grade at least one year. Subjects were randomly selected from four classrooms in two schools. The schema-based experimental approach is called the Problem Patterns (PP) approach. Students receiving this instructional approach were taught to break problems into data, units, and desired solution, removing irrelevant information, and make a solution model with manipulatives. Control students followed the traditional classroom approach. All classes were taught by the first researcher. Evaluation results showed the PP students had higher achievement and growth scores than the control students. The results also showed the schema building portion of instruction contributed most to the differences in performance of the experimental groups' students.

**Keywords:** Mathematical learning, problem pattern approach, schema-based problem solving, word problems, at-risk students

2017 Hipatia Press
ISSN: 2014-3621
DOI: 10.17583redimat.2017.2612

*REDIMAT, Vol. 6 No. 3 Octubre 2017 pp. 228-255*

# Uso de un Nuevo Enfoque Esquemático de Resolución de Problemas con Palabras con Estudiantes de Primaria en Riesgo

Parvaneh Amiripour
*Islamic Azad University*

John A. Dossey
*Illinois State University*

Ahmad Shahvarani
*Islamic Azad University*

(*Recibido: 03 Marzo 2017; Aceptado: 06 Octubre 2017; Publicado: 24 Octubre 2017)*

**Resumen**

En este estudio se comparan dos enfoques, uno basado en esquemas para representar una forma de solución para resolver problemas contextuales con números enteros para los grados 2 y 3, con otro basado en el enfoque tradicional del libro de texto. Los participantes son estudiantes refugiados afganos de 9 a 11 años inscritos en escuelas no públicas administradas por una organización no gubernamental en Irán. Los sujetos fueron seleccionados al azar de cuatro clases en dos escuelas. Los estudiantes en el grupo de control siguieron el enfoque tradicional de la clase. Todas las clases fueron impartidas por el primer investigador. Los resultados de evaluación muestran que los alumnos que usaron el enfoque PP tuvieron un mejor rendimiento que los alumnos en el grupo de control. Los resultados también muestran que la porción de formación de esquemas de la enseñanza fue lo que más contribuyó a las diferencias en rendimiento de los estudiantes en el grupo experimental.

**Palabras clave:** Estudiantes en riesgo, aprendizaje matemático, enfoque de patrones de problemas, resolución de problemas basada en esquemas

2017 Hipatia Press
ISSN: 2014-3621
DOI: 10.17583redimat.2017.2612

Studies of elementary students' achievement and progress in mathematics highlights the important role played by the ability to establish and develop the fundamental skills in solving numerical problems delivered in context (National Mathematics Advisory Panel, 2008). This study focuses on a new approach to teaching and assessing instruction for at-risk second and third grade students' in mastering such skills and procedures. With numeracy skills needed more than ever in the work place, today's students must be able to compute fluently, engage in logical reasoning and use mathematics to tackle novel problems. However, PISA 2012 results show that only a minority of 15-year-old students in most countries grasp and can work with core mathematics concepts…'Opportunity to learn' refers to the content taught in the classroom and the time a student spends learning this content. Not all students, not even those in the same school, experience equal opportunities to learn. Reducing inequalities in access to mathematics is not an impossible task. PISA results show that performance disparities between socio-economically advantaged and disadvantaged students are largely linked to differences in students' familiarity with mathematics. Thus, raising disadvantaged students' opportunities to learn mathematics concepts and processes may help reduce inequalities and improve the average level of performance" (OECD, 2016, p. 13).

McCann & Austin (1988) described three features of an at-risk student:

- Learner in severe danger of not attaining the ends of education exhibited through failure to reach local or state standards for high school graduation and/or failure to gain the understandings, skills, and dispositions to become an industrious participant of society.
- Learner who displays actions that instructors categorize as interfering with the learning and educational processes
- Learner whose domestic or community upbringing and/or experience may place him or her at-risk. Conventionally, educationalists have examined the economic status of students and used it as an initial indication in efforts to determine if a student is at-risk of not succeeding in school. (p. 4)

**Mathematics Difficulties at the Elementary Level**

Mathematics difficulties (MD) at the elementary level, in addition to the growth of at-risk factors, lead to long-term difficulties in learning. "In the absence of effective interventions, many students who enter first grade with mathematics delays stay behind throughout their school careers" (Morgan et al., 2009, p. 311). When these children enter school with difficulties, they are unable to experience the same progress and success as their counterparts. This, in turn, leads to a pattern of unpreparedness for mathematics instruction in the following elementary grades (Jordan, 2007; Jordan et al., 2006; National Mathematics Advisory Panel, 2008; National Research Council, 2009; Starkey et al., 2004). These reports indicate that "low-income children comprise 76% of fourth graders who scored in the lowest 25% for mathematics, an increase of 2% from earlier reports." These, and other, results suggest that the use of effective and systematic intervention for MDs is so important for at-risk children with difficulties in culture, social, and educational venues. Assessments of number competencies and skills are a major estimate of the degree of mathematics achievement these students will experience (Jordan et al., 2009, p. 862). The level of mathematics achievement of kindergarten children is constantly found to be a major predictor of mathematics achievement in later grades (Claessens et al., 2009; Duncan et al., 2007; Duncan & Magnuson, 2011). "Understanding of number concepts and relations helps children perform arithmetic operations and can be applied to other mathematical domains such as measurement, data analysis, and geometry" (National Research Council, 2009, p. 332). Children, who have difficulties with number competencies and rote memorization, will have difficulties in skills for PS, arithmetic and computation (Robinson et al., 2002). The *Common Core State Standards in Mathematics* (CCSSM) reported that "by the end of kindergarten, children should be able to count to 100 by ones and tens, write numbers from 0 to 20, understand one-to-one correspondence and cardinality, compare numbers, solve addition and subtraction problems with objects, solve word problems (WP), and fluently add and subtract within five, among other skills" (National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers, 2010, p. 332).

Practices that are based in understanding contribute to learners' knowledge through 'long-term representations' of combinations. An early focus on conceptual understanding and representations of such knowledge forms a basis that is accessible for application in future contexts (Fuchs et al., 2013; Jordan, 2007).

## Knowledge About Word Problems

Studies focusing on elementary students reading of the words of text in a WP, show that many of them have difficulties in identifying the main information and linking it to a number sentence representing the relationships at the core of the problem. Other studies have found that a schematic approach to problem solving can assist in developing the capacity of WPs. Learner/s who solve problems efficiently, are often able to find the 'superficial surface features' of a WP and can then determine the main structure or 'schema of the problem'. When they subsequently learn that a WP often might have different story forms, they are then able to draw out several mathematical relationships in detail (Powell, 2011). In comparison, learners who are weak solvers are more likely distracted by "irrelevant information" such as keywords. These students are usually unable to determine or verbally report the similarities/differences in words between the structures of the sentences.  This may result from the fact that in their mind such structures do not relate to the main goals of WPs (Schiff et al., 2009). Carpenter & Moser (1983) categorized WPs into three main schemas: '*Change, Difference and Combine*'. Other studies found that when numbers above 10 (two digits) were written in a WP, many students were not capable of identifying the main schema of the WP. Also, unknown amounts/numbers appearing in a WP leads to mistakes when students need to interpret them in a WP (Garcia et al., 2006). In one-step problems, the status and understanding of the "unknown numbers" occurs in three forms:

- Result is unknown (5 – 2 = ?),
- Change is unknown (5 – ? = 3), and
- Start is unknown (? – 2 = 3).

Findings in these studies report that students can often work their way through modeling the first two models, they experience extreme difficulty in wrestling with the “Start is unknown” problems (Garcia, et al., 2006, p. 278). The most difficult format is the 'unknown start' in that it triggers mistakes or use of mistaken methods. It is possible that many students attempt to reword/rework WP into this style: ? – 2 = 3 → 3+2 = 5. It seems that maybe some students are unable to find form, or format, to apply when they face such WP contexts. To develop real efficiency with at-risk students with WPs, it appears that we may have to follow another teaching method for WPs (Kroesbergen et al., 2003). There are many direct approaches for teaching students WPs to at-risk students (Jitendra & Xin, 1997). These direct approaches to WPs include:

- Diagramming WPs (Van Garderen, 2007),
- Identifying keywords and solving with emphasis on the keywords,
- Using computer-assisted instruction with direct step-by-step strategies (Mastropieri et al., 1997),
- Using 'mnemonic tools' to guide WPs (Miller & Mercer, 1993),
- Teaching meta-cognitive approaches to control WPs process (Case et al., 1992);
- Using a checklist of steps to solve WPs along with supervising using meta-cognitive approaches (Montague & Applegate, 2000).

A progressive approach to helping at-risk students learn how to solve WPs, which has been improved over the last 30 years, is the use of a 'schematic diagram' to solve WPs (e.g., Fuchs et al., 2004; Jitendra & Hoff, 1996). "WP instruction using schemas differs from typical WP instruction (e.g., key words, checklist of steps) because students first identify a WP as belonging to a problem type and then use a specific problem-type schema to solve the problem" (p. 3). In routine WP teaching, students may identify WP information or/and follow a mnemonic tool to work step-by-step during WPs. It seems that students, and especially at-risk students require many teaching approaches when they solve WPs. One of these approaches is the use of schema embedded in concrete models. Such an approach, which we call the Problem Pattern (PP) approach, is at the core of our study.

## Method

### Participants

Two grades 2 and two grades 3 classes were purposeful selected from each of the four participating schools administrated by the non-governmental organizations: *Society for Protecting the Rights of the Child* and the

*Association of Protection of Children Labor*. Such societies in Iran focus on at-risk children in education, health care, consultative services for families, and life skills training for children injured in war and natural disasters. In the present study, all the students selected were at-risk Afghani students living in the southern sectors of Tehran. Further, these students laboured a portion of each day as sellers in the markets or in performing menial labour.

Participants from the classes were then purposefully selected using the criteria of having a record of mathematical difficulties and having been retained in grade at least once so far in their schooling. These students' classrooms were then randomly assigned to be either in a control or experimental classroom.

**Instruments**

The researcher sought and created a variety of measures of aspects of number and operation items to use in assessing student learning of WPs learning throughout study. The instruments included pretests and posttests, and four interim tests given at two-week intervals throughout study, including the beginning and end of the study. Each test consisted of ten-word problems (WPs) attuned to the lessons so that they contained the same variety of difficulty levels of problems for each grade: easy (2 questions), difficult (4 questions), and very difficult (4 questions). In the pretests, some of the WPs had irrelevant information added, while other problems included cases that required students to carefully relate the information involved to develop a final solution to the problem. Some of WPs required more than one operation. In the second grade, WPs required two operators: addition or subtraction. However, WPs for third graders required up to four main operations: addition, subtraction, multiplication, or division. For pretests and posttests, ten WPs were developed following the same difficulty structure. Some of the WPs had added information and some required more than one operation for solving them. Each test had a total possible score of 20 points (See Table 1). These tests were examined by teachers in the schools and by university mathematics educators. Both groups agreed that the items were appropriate for the grade levels and appropriately classified with respect to difficulty. Thus, the tests were accepted as valid measures of student achievement. With respect to the reliability of the mathematical tests developed for pretests, interim tests, and posttests by grade levels, developmental work focused on creating tests equivalent to those used in similar work with students at the impacted grade levels. Table 1 displays the timing of the tests and the resulting reliability coefficients computed with Cronbach's α. These values were between 0.85 and 0.90 for the pretest, the four interim tests, and posttest at grade 2 and between 0.82 and 0.89 for the tests at grade 3. The results suggest that use of these instruments in classes was appropriate.

Table 1.
*Examination time line and test reliabilities (Cronbach, 1951)*

| | | | |
|---|---|---|---|
| Final math exam | 20 days before pretests | α=0.80* | α=0.81** |
| Before teaching | Pretest (8 days before 1st) | α=0.86* | α=0.83** |
| 1st week | | | |
| 2nd week | | | |
| 3rd week | First session exam | α=0.87* | α=0.85** |
| 4th week | | | |
| 5th week | | | |
| 6th week | Second session exam | α=0.87* | α=0.84** |
| 7th week | | | |
| 8th week | | | |
| 9th week | Third session exam | α=0.85* | α=0.82** |
| 10th week | | | |
| 11th week | | | |
| 12th week | Fourth session exam | α=0.87* | α=0.84 |
| After 12th week | Posttest (10 days after 12th week) | α=0.90* | α=0.89* |

* Reliability for grade 2

** Reliability for grade 3

Note: Final math exam is implemented through both associations before pretests

## Instruction by New Schema Approach

As all students in the study, whether in the control or experimental sections, were taught by the researcher, so that any variance due to teacher effects was lessened to the degree possible. Further, many of the students were repeating their current grade, so they were repeating the traditional method of instruction from the Iranian grade text book for a second year. The only variation in instruction by the researcher was that when the content of the word problem solving (WPs) portion of the curriculum was covered the experimental sections, the problem pattern approach (PP) to solving WPs was taught in grades 2 and 3. When the traditional approach for teaching WPs was taught in the control sections, the researcher followed the approach used in the Iranian textbook for each of the respective grades.

Neither the researcher nor the student's regular classroom teachers were graduates of a teacher education program. Thus, all were acting from their experience in teaching mathematics based on general experience in teaching, not knowledge of specific teaching approaches tied to the materials with grade 2 and grade 3 students. Further, the problems on the instruments described below were new to all the students.

## Linear PPs

The researcher used a simple PP format as a pilot step for experimental group students. Such a PP structure is found in the form of three main WPs. Consider the following problems that were developed by Jitendra (2002), along with a schema for solving each problem.

*Problem: A balloon man had some balloons. Then 14 balloons blew away and the man now has 29 balloons. How many balloons did the man begin with? (Jitendra, 2002).*

The following steps illustrate the nature of moving through a word problem using the PP approach (refer to Figure 1). First, a student reads a problem at a level of generality, then moves to find numbers and words that are clear in the WP. Then student draws several circles. These circles serve as the receptacles for writing in the main data points in numbers and words. At the second step, the student must determine and draw an operator's circle with another color. That is, the color of the data points' circles should differ from that of an operator's circle. This second circle is added to the PP model. At this point, the student must find a suitable path among the data's circles and operator's circle to represent the problem. These different color representations among the circles should be based on logical relationships among the numbers, words, and the operator(s). In this step, students must draw connecting lines among circles with another color. As a third step, the student observes a main way of drawing a PP for the WP. This main way indicates 'unknown and known information'.

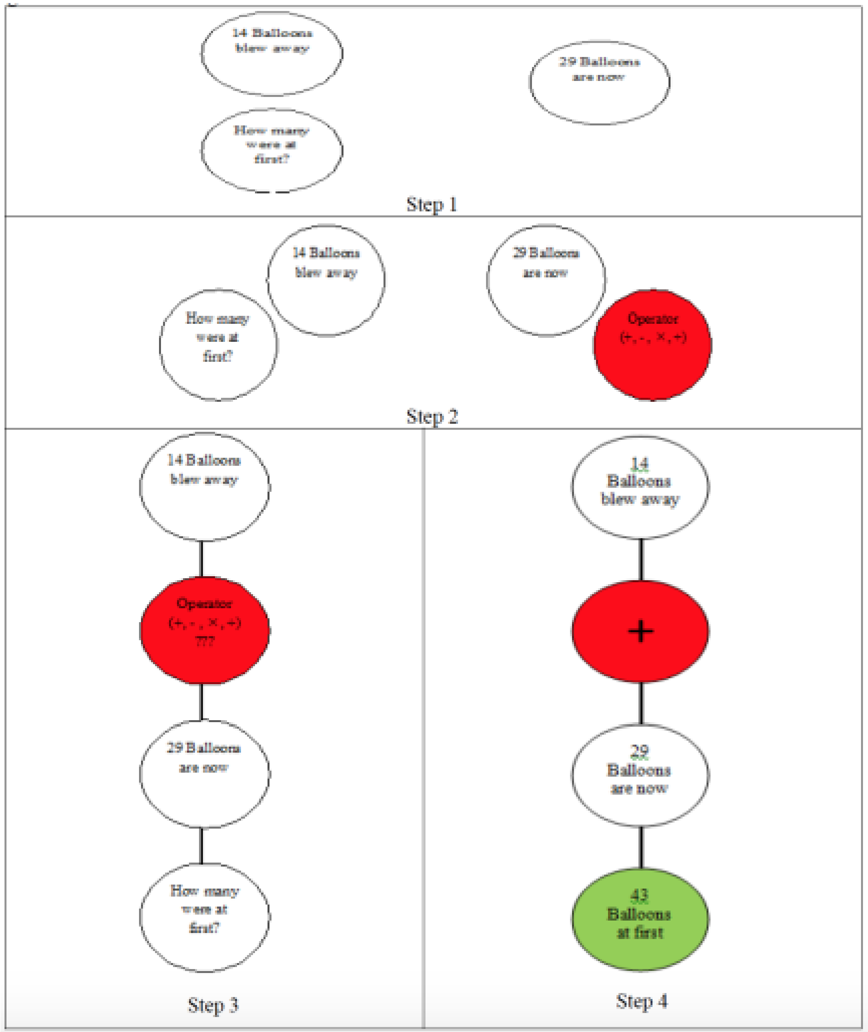



*Figure 1.* The steps of drawing a linear PP for the change problem

The student can discover that an addition operator is needed by assistance from the teacher the first time through the problem. But, then he/she should select the operator later by herself or himself. In the fourth step, it is obvious that student must add the two main numerical pieces of data information to access the final answer. 'Addition operator' can show numbers of balloons at start (see Figure 1). It is essential that the answer and operator's circle differ from the color of the other data circle.

In constructing a PP approach model, one may have an information circle/s that has no relationship to other circles. Such information with no relationship to the other information is irrelevant to a solution. The Figure 2 below is such a problem.

*Problem: Barbara is 37 years old. Cindy is 7 years older than Barbara. Anne is 8 years old too. How old is Cindy?*

In this problem, the age of Anne is irrelevant information, as the PP model shows clearly this circle has no relationship to other circles. Anne's age circle is not connected to any of the other circles.

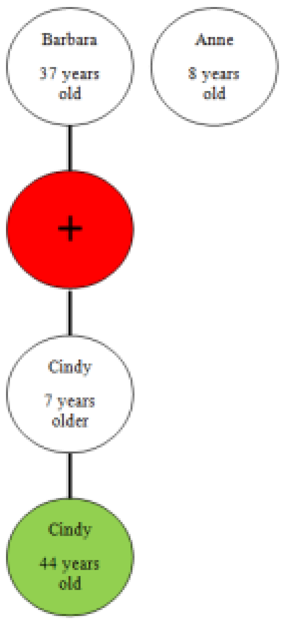



*Figure 2*. A linear PP problem with irrelevant information

**Nonlinear PPs**

Many WPs situations have more than one operator, but their connection of circles differs from that found in linear PPs. They differ in the fact that their solution cannot be represented as a linear path or segment. When a student reads a nonlinear WP, he/she notes that the structure of that problem requires two or more operators. The difficulty resides in finding the connection/s among the main information (numbers and words) and operators. When the student recognizes there appears to be too many circles representing information circles and operator circles, they have their first clue that the situation may call for a nonlinear PP model. In linear PPs, lines have same color, but not so for nonlinear PPs. If the student tries to make a PP with lines of the same color, the student will not be able to find a main path involving its operator circles. Thus, students must determine ways using connecting lines with different colors. This makes the main path among circles and lines more easily determined. Through using different colored lines, students find how to follow and merge a collection of paths for accessing a main path for the solution. Among nonlinear PP problems, it is observed that: (a) Each sub-path has one operator, (b) Irrelevant information does not fit into any paths or operator, (c) Each sub-path has a unique color, (d) Two operators or more cannot be in a single path, and (e) Nonlinear PPs are unique; that is, a PP that can be slid or rotated onto the shape of a correct PP which is also a correct solution. Consider the following problem.

*Problem: Mary has $1000. She wants to buy 2 red apples which are $50 apiece and 4 cucumbers which are $50 apiece. How many dollars did she spend? How many dollars has she now?*

Considering the problem, a student finds numbers and words that have a relationship to the context. Write numbers/words in circles as shown in the first step. For the second step, the student must find the total price of 2 red apples and 4 cucumbers. From previous experiences, a student knows that 'multiplication' is the operator. Returning to previous knowledge regarding linear PPs, a student can find the price of both 2 red apples and 4 cucumbers separately (see Figure 3). For the third step, the student is required to read through the problem again. The main question is to what remains from Mary's original amount of money. Thus, student must first add to find the total price of red apples and cucumbers altogether and then subtract this sum from the original money amount to find the remainder of Mary's money. A circle containing $300 has been computed from the addition of circles of $100 and $200 in the two linear PPs represented by sub-paths.

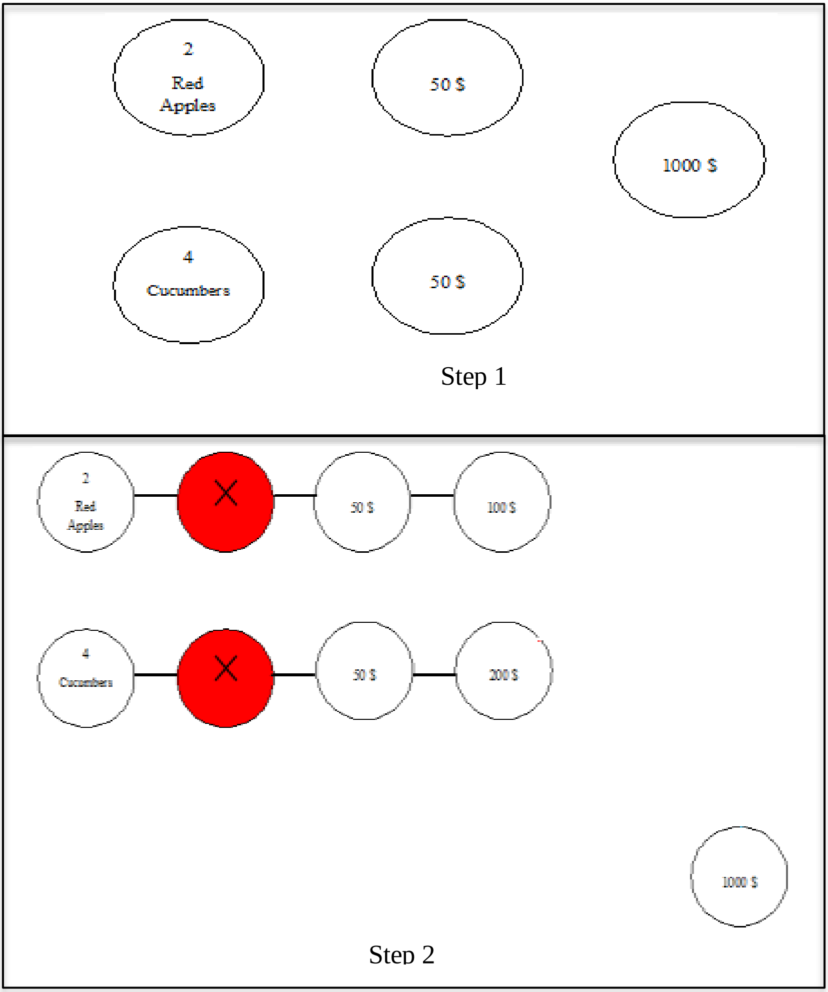



*Figure 3*. A nonlinear PP

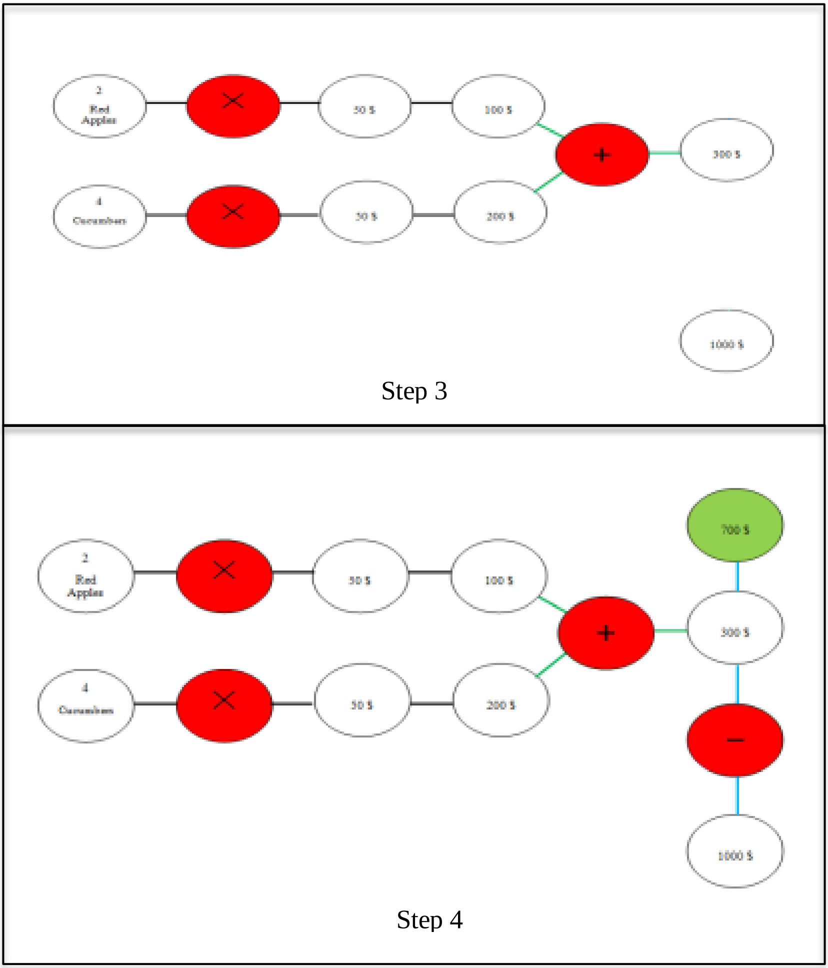



*Figure 3*. A nonlinear PP

It is important that lines among circles of \$100 and \$200 have a different color than the one from the multiplication operator. Different color (red lines) can contribute to find sub and main paths, helping differentiate them from other paths and each other. At the fourth step, student must find a reminder amount or, the main aim for this WP. Here, student must find the final main path illustrated with a different color (blue lines). Now, the student must find the final answer through subtraction. This is why some of these problem cases are so difficult. Suppose a student has completed a PP, the teacher can ask of him/her to interpret the WP through his/her PP. This type of explanation contributes to WPs, to the design of a problem with these information and operation/s, and through modeling efforts causing students think through in such a problem situation. Students can review their work PP through reading the data and operations again.

The following problem, used in the traditional control classrooms, suggests that a student should have to develop a solution this problem, but the authors have not proposed how to structure this pattern.

*Problem: Each of three students has two colorful packages of pencils: a package has 6 pencils (package 1), and the other 12 pencils (package 2). Package 1 has 1 yellow pencil and Package 2 has 2 yellow pencils. How many yellow pencils have these three students? (Davoodi et al., 2014-2015).*

The researcher suggests that students attempt a PP structure for their solutions. A student must put circles for main numbers along with words (step 1). Then, as shown, packages 1 and 2 should relate to 6 and 12 pencils respectively without an operator between them in this PP. Some PPs, such as the PP for the pencil problem, some of the circles have no operator between them (see Figure 4; step 1). Step 2 indicates that one yellow pencil and two yellow pencils have relationship to both package 1's and package 2's circles, respectively. This indicates circles from right hand belong to circles from left hand. Certainly, no operator can be put between these circles. The lines between them are solid black. This line must differ in color from that of other lines. In the third step, a student finds that 1 yellow pencil for each three students will be 3 yellow pencils by using either multiplication or addition separately, and for the rationing of 2 yellow pencils for each of three students will result in 6 yellow pencils.

This can be found either through multiplication or addition separately (see Figure 4; step 3). This PP has used a multiplication operator. Lines among them are red. Returning to read the original problem, the student finds the problem asked that the student must find the overall total number of yellow pencils. Thus, other operator must add the subtotals found in the two linear sub-PPs.

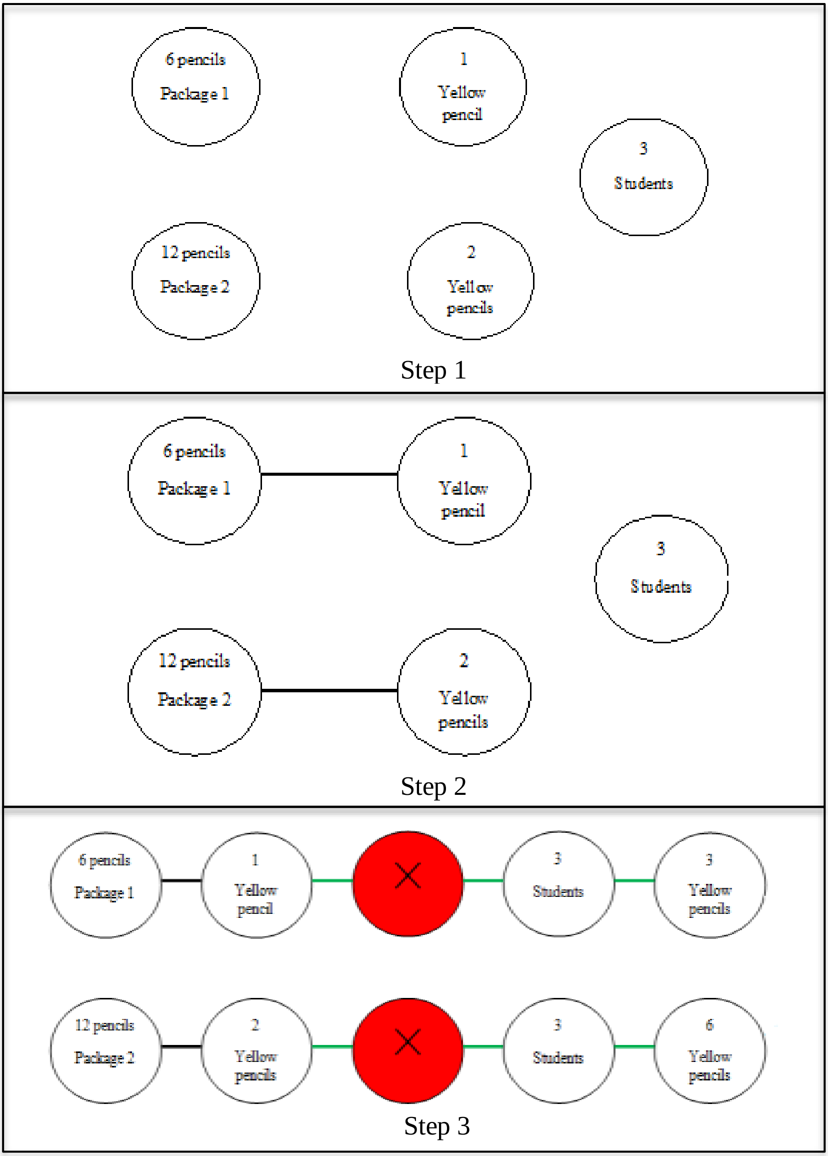



*Figure 4.* An open nonlinear PP

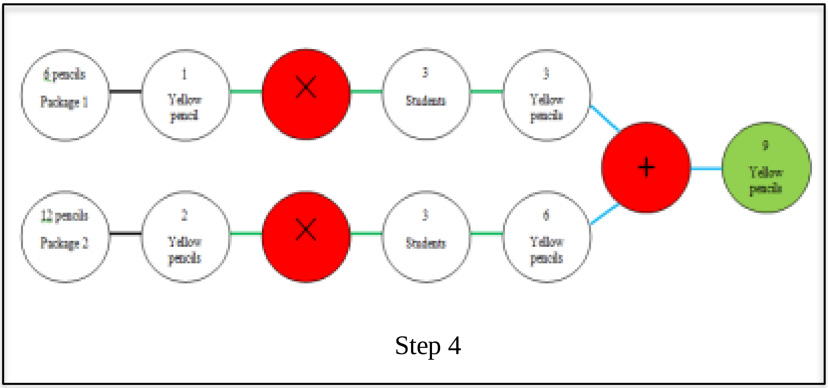



*Figure 4.* An open nonlinear PP

The subtotals in the two final circles must be added through an addition operator (see Figure 4; step 4) with the other ways/lines (blue lines). This connection of the two linear PPs converts the model into the final nonlinear PP. For steps 1 to 3 the PPs developed were linear, but at fourth step, PP model has converted to that of a nonlinear PP. It is obvious that PPs can be linear in their first steps, but then, the PPs can change to nonlinear PPs. In addition, a special state is observed that there is not any operator between the circles in the first step in above problem.

The researcher has found that PPs can 'closed and open' in addition to having underlying linear or nonlinear models. Many PPs are closed and many are open. Almost all PPs in an Iranian math book are open. Students can observe 'open PPs' often. 'Closed PPs' are special state of PPs that all circles have relationship each other. All previously cited PPs were open PPs. In closed PPs, it seems that all refer to their first circle/s. The colorful lines contribute to determining the main way. A 'closed PPs' is like a circle. Examining these circles, a student can return to the first steps or sometimes a student can propose an 'open PPs' at first steps then develop them to the final steps to complete the whole closure of the closed PP. Closed PPs occur in nonlinear PPs category. It seems that closed PPs are more difficult for students who are categorized as being at-risk students. This problem is a 'closed nonlinear PP':

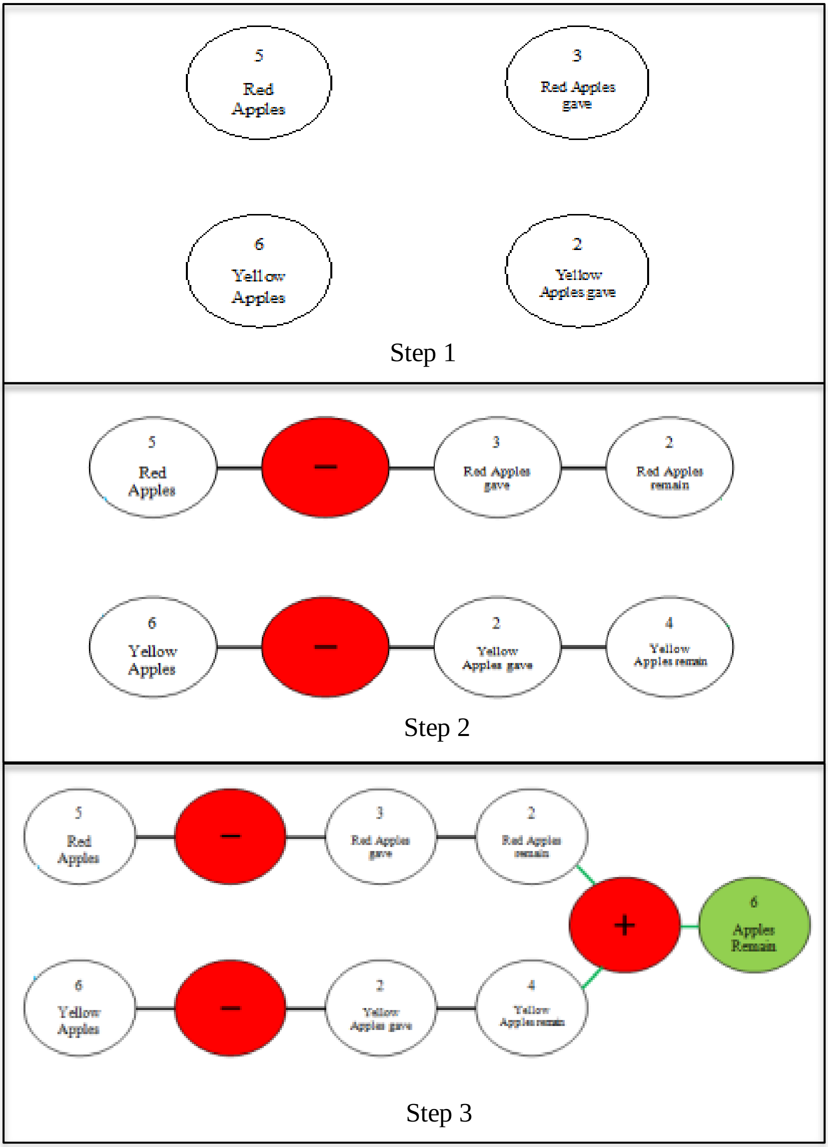



*Figure 5.* A closed non-linear PP

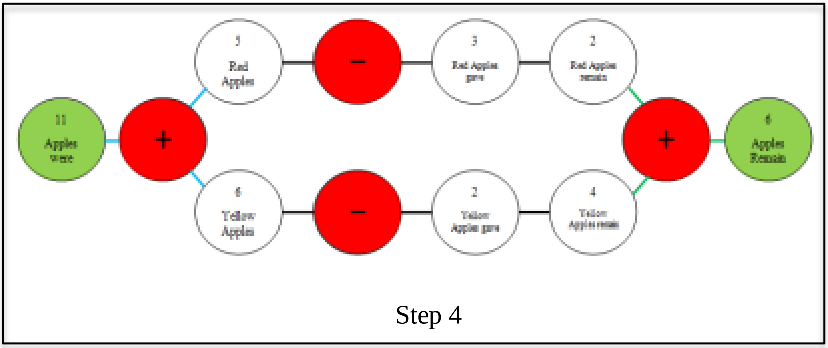



*Figure 5.* A closed non-linear PP

*Problem: John has 5 red apples and Mary has 6 yellow apples too. John gives 3 red apples to his mum, and Mary gives 2 yellow apples to her friend. How many apples do they have now together? How many apples did John and Mary have already together?*

In problem, two questions are asked of the students that require the construction of a special PP. At first step, a student main writes numbers along with words for both John and Mary and places them in separate rows. Since the first question following step 1 remains, students must find the number of apples remaining for each of Mary and John separately through red lines and the subtraction operator (Step 2). For the third step, students must response to first question. Thus, the number of apples that remain together must be found by adding through an addition operator with the other lines (blue line). This results in the PP shown. Here, students encounter an 'open-nonlinear PP' (Step 3). Since students still must respond to the final question about the total number of apples John and Mary had at the beginning, the second question from problem.

So, students must return to the first circles and lines. The circles for the 5 and 6 apples for John and Mary, respectively, must be added to the response of the second question, that is, 11 apples in all. Another way to respond would be to draw with another other color (green color) (see step 4). As it is obvious from Step 4, there is not any distance between the two lines. All lines are continuous. There are three ways to show the response in this PP. It seems that there is a relationship between the first circle (11 apples) to final circle (6 apples). Closed nonlinear/linear PPs can often indicate a rational relationship existing among the information. This is a difference between a closed PP and an open PP. In open PP (linear/nonlinear), the WPs often follows a unique question but for almost all closed PPs (linear/nonlinear) this does not occur. Closed PPs have many lines and there is a main solution goal tying the first way (circle) and final way showing the total in the right-hand circle in Step 4. In addition, closed PPs are unique as open PPs. PPs must be drawn about special principles governing either linear PPs or nonlinear PPs. As it is shown, all circles written/drawn on left hand and operator's circles must be put among data's circles so that they direct the calculation of how the students add/subtract/multiple/divide numbers.

## Findings

This section reviews the data outlining the model, data, and demographic data related underpinning the hypothesis that at-risk students taught WPs through the PP approach in the experimental sections will perform statistically significantly better on the posttest than students taught via traditional teacher led instruction in the control sections. While the entire study involved other questions, covered in additional papers, this paper focuses on the major hypothesis: *The post-test performance of at-risk students taught by the PP approach differs statistically* ($p < 0.05$) *from the posttest performance of students taught by the traditional method.*

The test data was analyzed by grade levels of the students involved in the experiment due to the differences in the content on the pre- and posttests for students in the two levels: grade 2 and grade 3. Changes were made in the methods of data analysis because of differences in the numbers of students in the second and third grade experimental samples and others from differences in the variability within in these groups themselves.

Note that there were 35 students in grade 2 and 65 students in grade 3. These numbers resulted from the distribution of at-risk students meeting the criteria of having mathematical learning difficulties and having been retained in grade at least once in kindergarten through grade 3.

The average age of students in the control sections was between 9 and 10 the *Society for Protecting the Rights of the Child* (*Naser Khosrow & Shosh Houses*) and the *Association of Protection of Children Labor* (*Molavi*

*& Khavarn Houses*) this average age was between 9 and 11 years of age. Table 2 displays the distribution of the students by gender to the experimental and control groups by grades. Here we see a more disparate assignment of students to experimental and control group membership by the random sampling process used. This is especially seen in the female assignments in grade 2.

Table 2.
*Number of subjects by gender in grade level and in treatment groups*

| | Grade 2 | | Grade 3 | |
|---|---|---|---|---|
| | Experimental Group | Control Group | Experimental Group | Control Group |
| Male | 12 | 10 | 14 | 17 |
| Female | 3 | 10 | 21 | 13 |
| Total | 15 | 20 | 35 | 30 |

Table 3 allows the comparison of students on the pretest and posttest by control and experimental groups by total population. Striking in this data are the similarities of the two groups on the pretests, but their vast differences in their performance on the posttests.

Table 3.
*Pretest and posttest score statistics for control and experiment groups*

| | Control Group | | Experimental Group | |
|---|---|---|---|---|
| | Pretest | Posttest | Pretest | Posttest |
| N | 50 | 50 | 50 | 50 |
| Mean | 6.56 | 6.40 | 5.84 | 15.68 |
| Median | 6.00 | 7.00 | 6.00 | 17.00 |
| Mode | 6 | 6 | 5 | 19 |
| Std. Deviation | 1.91 | 2.61 | 2.58 | 3.67 |

Table 4 allows the reader to examine the performance data further by partitioned further into grade level performance. Here one can detect grade specific differences in the performance between pretest and posttest for grade 2 and grade 3 students. While the tests at both grade levels had possible scores from 0 to 20 points, the following analyses provide separate discussions of the control and experimental groups by grade levels, as the combination of their data for analysis would be open to validity challenges because of the differing content tested at the two grade levels. One should also note grade 2 experimental students started below the grade 2 control students but finished considerable higher than them.

Table 4.
*Pretest and posttest scores by grades for experimental and control groups*

| By Test | Control Group | | | | Experimental Group | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Pretest | | Posttest | | Pretest | | Posttest | |
| By Grade | Second | Third | Second | Third | Second | Third | Second | Third |
| N | 20 | 30 | 20 | 30 | 15 | 35 | 15 | 35 |
| Mean | 6.40 | 6.73 | 5.35 | 7.10 | 6.20 | 5.68 | 15.20 | 15.91 |
| Median | 6.00 | 7.00 | 6.00 | 7.00 | 6.00 | 6.00 | 17.00 | 17.00 |
| Mode | 6 | 6 | 2 | 10 | 6 | 5 | 19 | 18 |
| Std. Dev. | 1.95 | 1.99 | 2.68 | 2.36 | 3.02 | 2.39 | 4.50 | 3.33 |

The hypothesis states that: *The post-test performance of at-risk students taught by the PP approach differs statistically* ($p < 0.05$) *from the posttest performance of students taught by the traditional method.* In the following pages, we will investigate whether there is evidence that allows one to say that chances are that students exposed to the PP approach perform better than their peers in the control group at the $p < 0.05$ level.

Before testing groups by performance on their respective pretests and posttests, it necessary to check to assure that the data for each approach is normally distributed, as this is a basic assumption of the *t*-test planned for use. The test results using the Kolmogorov-Smirnov test for the normal distribution of responses in the data for pretests from the control and from the experimental groups by grade 2 and grade 3 levels returned mixed results. The results showed that the data testing normality for both control and experimental classes in grade 2 pretest and posttest classes and in grade 3 pretest classes satisfied the normality criterion ($p > 0.05$). However, while the data for the grade 3 control group satisfied the normality criterion, the data for the grade 3 experimental group for posttest were not normally distributed ($p < 0.05$). Thus, the parametric test, the Independent Samples *t*-Test, is chosen to test for differences in the pretest performance of all grade 2 and the grade 3 pretests. The nonparametric test, the Mann-Whitney U Test, is used for the posttests of the grade 3 data, as it does not require the normality of the underlying data.

The use of the Independent Samples t-test requires that the data sets being contrasted have equal variances. This was done with the Levene test and in cases for the grade 2 tests, experimental and control and for the grade 3 pretests experimental and control, the criterion for the equality of variances was satisfied. Hence, the analysis continued with the testing of the equality of the pretest and posttest means for both grade 2 pre-test and post-test means for control and experimental groups and for the grade 2 pretest and posttest mean for control and experimental groups. Hence, one can continue to the Independent *t*-test for the posttest means of the two grades 2 groups. Table 5 shows that at the grade 2 level, the results showed that a significant difference (*p* asymptotically equal to 0.000) existed in the means of the grade 2 posttest scores, where there was no significant difference in the means of the pretest scores between the groups. In fact, there was a lower mean at for the experimental group at the pretest time. Hence, the grade 2 experimental group had a lower mean at the pretest time and a score significantly higher than the control group at posttest time. Thus, for grade 2 students, the PP approach was significantly better than the traditional approach in teaching students WPs techniques.

Table 5.
*Independent samples T-test for posttests of grade 2*

| | *F* | Sig. | *t* | df | Mean Difference | 95% Confidence Interval of the Difference | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | Lower | Upper |
| Equal variances assumed | 6.20 | 0.17 | -8.07* | 33 | -9.85 | -12.33 | -7.36 |
| Equal variances not assumed | | | | | -9.85 | -12.56 | -7.13 |

Note: *p<.05

To complete the analysis, we turn to a non-parametric Mann-Whitney U test for examining the difference of means for the posttests at the grade 3 level. The difference of the control and experimental results for grade 3 at the posttest level was significant. The results of the Mann-Whitney U-test showed that comparison of the ranks for the two grades 3 samples (Table 6) to be statistically significant favoring the experimental group (*p* asymptotically equivalent to 0.000) in Table 7. We must reject the null hypothesis and accept the alternative hypothesis give the resulting *p*–value approaching 0.000, a value clearly satisfying the ($p < 0.05$) criterion. One then rejects the null hypothesis of no difference in performance and accepts the alternative hypothesis that students in the experimental group performed significant better in the experimental group at the grade 3 level.

Table 6.
*Calculated ranks for the posttests of the grade 3*

| Code | N | Mean rank | Sum of ranks |
|---|---|---|---|
| Control group | 30 | 16.60 | 498.00 |
| Experiment group | 35 | 47.06 | 1647.00 |
| Total | 65 | | |

Combining this result with the similar finding at the grade 2 level, we conclude that the use of the PP approach to the teaching of WPs was significantly better than the traditional approach in the learning of WPs.

Table 7.
*Mann-Whitney test for posttest of grade 3*

| Statistics | Posttests |
|---|---|
| Mann-Whitney U | 33.00 |
| Wilcoxon W | 498.00 |
| Z | -6.50* |

Note: *p<.05

## Conclusion

In the present research, the PP approach is proposed as a strategy for WPs. Since many students cannot solve complex WPs, it seemed that teachers should introduce a new and efficient strategy for WPs as an educational intervention. The PPs approach was developed and after revisions following pilot testing, the research team found evidence for introduced PPs for at-risk students in the experimental study described. At-risk students were chosen from among students having mathematical difficulties and who had also been retained in grade in at least one year. Further, they did not pass the school's final mathematics examination in the previous year. These students' work with WPs was characterized by repeated mistakes in WPs.

In the first instructional sessions with PPs in the experimental classes, at-risk students practiced building models for linear PPs through colorful colored clay and pipe cleaner models. The researcher introduced the PPs approach by having the students work in small groups to model linear problems. At first, at-risk students were unable to design PPs correctly, voicing a dislike the new PP approach. Students could not think through the identification of the main structure of the natural number WPs. The researcher then asked them to find the main information at first. Then, the students were directed to examine the relationship between the known data and unknown in the WPs. This was followed by finding and relating a main operation (+, −, ×, ÷) to the linear PPs models. Conversations between the researcher and at-risk students often contributed to students' increased understanding and improvement in their designs for PPs. After one month, they could identify and design the main path between the main information (numbers and unknowns) and find the operation related to the problems presented. Then, a second step was to solidify students' capability to find the main path among data and unknowns, operation/s, and the final answer. Many students found that smaller numbers could not be used as subtrahends in subtraction problems. The relational places that number(s) take in finding the main path to finding a final answer began to develop.

After the second month, at-risk students had improved their linear PPs from the first month level, so they began working on nonlinear PPs. This shift was very difficult for them. For nonlinear WPs, at-risk students faced many challenges. When the number of operations was greater than the one, students had extreme difficulty working with the related nonlinear PPs.

This change created a greater information-processing load for at-risk students as this also increased the number of data points and unknowns involved in the WPs. Students discovered that the separation of main information was possible through viewing individual PPs as part of building a model for the more complex nonlinear problems. This allowed at-risk students to handle the nonlinear settings. As students worked with both linear and nonlinear PPs, problems were presented based in stories (dramas) of a family engaged in routine problem situations requiring mathematical-based solutions. At-risk students were thus engaged in settings using "age, money, time, categorize, distance, length, and weight" along with the four main operations in PPs. The researcher had to supply more help in the first steps of structuring and answering nonlinear PPs. At this point, the researcher first asked and modeled answering the questions to be asked. It was here that the researcher found that at-risk students had to use different colors for modeling the data and pipe cleaner for the two embedded PPs. This step of using use different colors for the embedded linear PPs found in nonlinear PPs assisted at-risk students in finding the separate embedded paths the first information, its answer, and the movement to the final solution. During the third month, many of the at-risk students began to design open nonlinear PPs and extended their understandings to closed nonlinear PPs. Closed nonlinear PPs were very difficult for at-risk students, particularly second graders. Conversations between the researcher and experimental sessions students took place during the three months of the experimental treatment, as well as pretest, four intersession exams, and a posttest. In the control groups students' classroom teachers proceeded as normal with texts normally found in the Iranian school mathematics curriculum and taught students in the control sections in the participating schools the solution of WPs as traditionally done. The only difference for them was the administration of the tests associated with the experiment.

In the control group, the researcher worked with at-risk students under the same conditions as with the experiment group except for teaching from the adopted mathematics text, which was the same text in all classes involved, differing only by the grade level intended. The PP approach was not used in the control sections. One classroom assessment difference was asking control students to draw a representation of problems which was not a textbook-based instructional method. However, the results showed this did not have a significant effect on control students versus experimental students. However, students in the experiment groups could propose PPs correctively and draw a design or schema that led to finding the main path/s and final solution. As all the at-risk students have essentially the same surrounding conditions regarding social, cultural, and financial situations, as well as all students were workers outside of class with hard working conditions, it appears that the PP approach is a promising approach for use in classes with at-risk students.

## References

Carpenter, T. P. & Moser, J. M., (1983). The acquisition of addition and subtraction concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematical concepts and processes* (pp. 7–44). New York: Academic Press.

Case, L. P, Harris K. R, & Graham S. (1992). Improving the mathematical problem solving skills of students with learning disabilities: Self-regulated strategy development. *Journal of Special Education*, *26*, 1–19. doi: 10.1177/002246699202600101

Claessens, A., Duncan, G. J., & Engel, M. (2009). Kindergarten skills and fifth-grade achievement: Evidence from the ECLS-K. *Economics of Education Review*, 28(4), 415–427. doi:http://journals.sagepub.com/doi/10.1177/002246699202600101

Cronbach, L. J. (1951). Coefficient alpha and the internal structure of tests. *Psychometrika*, *22*(3), 297-33. Doi: 10.1007/BF02310555

Davoodi, KH., Rastegar, A., & Alamiyan, V. (2014-2015). *3rd Math book*. Tehran: Islamic Republic of Iran Education.

Duncan, G. J., Dowsett, C. J., Classens, A., Magnuson, K., Huston, A. C., Klebanov, P., & Japel, C. (2007). School readiness and later achievement. *Developmental Psychology*, *43*(6), 1428–1446. doi:10.1037/0012-1649.43.6.1428.

Duncan, G. J., & Magnuson, K. A. (2011). The nature and impact of achievement skills, attention skills, and behavior problems. In G. J. Duncan & R. J. Murnane (Eds.), *Whither opportunity? Rising inequality, schools, and children's life chances* (pp. 47–69). New York: Russell Sage Foundation.

Fuchs, L.S., Fuchs, D., Finelli, R., Courey, S.J., & Hamlett, C.L. (2004). Expanding schema-based transfer instruction to help third graders solve real-life mathematical problems. *American Educational Research Journal*, *41*, 419–445. doi: 10.3102/00028312041002419

Fuchs, L. S., Geary, D. C., Compton, D. L., Fuchs, D., Schatschneider, C., Hamlett, C. L., & Changas, P. (2013). Effects of first-grade number knowledge tutoring with contrasting forms of practice. *Journal of Educational Psychology*, *105*(1), 58–77. doi:10.1037/a0030127.

Garcia, A. I., Jimenez, J. E. & Hess, S. (2006). Solving arithmetic word problems: An analysis of classification as a function of difficulty in children with and without arithmetic learning difficulties. *Journal of Learning Disabilities*, *39*(3), 270–281. doi: 10.1177/00222194060390030601

Jitendra, A., & Xin, Y.P., (1997). Mathematical word problem-solving instruction for students with mild disabilities and students at risk for math failure: A research synthesis. *The Journal of Special Education*, 30, 412–438. doi: 10.1177/002246699703000404

Jitendra, A. (2002). Teaching students' math problem solving through graphic representations. *Teaching Exceptional Children*, *34*(4), 34-38. doi: 10.1177/004005990203400405

Jitendra, A.K., & Hoff, K. (1996). The effects of schema-based instruction on mathematical word-problem-solving performance of students with learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, *29*, 422–431. [PubMed: 8763557]. doi: 10.1177/002221949602900410

Jordan, N. C. (2007). The need for number sense. *Educational Leadership*, *65*(2), 63–66.

Jordan, N. C., Kaplan, D., Ola´h, L. N., & Locuniak, M. N. (2006). Number sense growth in kindergarten: A longitudinal investigation of children at risk for mathematics difficulties. *Child Development*, *77*(1), 153–175. doi: 10.1111/j.1467-8624.2006.00862.x

Jordan, N.C., Kaplan, D., Ramineni, C., & Locuniak. M.N. (2009). Early math matters: Kindergarten number competence and later mathematics outcomes. *Developmental Psychology*, *45*(3), 850-867. doi: 10.1037/a0014939

Kroesbergen, E. H., & Van Luit, J. E. H. (2003). Mathematical interventions for children with special educational needs. *Remedial*

*and Special Education*, *24*, 97–114. doi: 10.1177/07419325030240020501
McCann, R. A., & Austin, S. (1988). *At-risk youth: Definitions, dimensions and relationships*. Philadelphia: Research for Better Schools Inc. (*ERIC Document Reproduction Service*, No. 307/359).
Mastropieri, M. A, Scruggs, T. E, Shiah, R. (1997). Can computers teach problem solving strategies to students with mild mental retardation? *Remedial and Special Education*, *18*, 157–165. doi: 10.1177/074193259701800304
Miller, S.P., & Mercer, C.D. (1993). Using data to learn about concrete semi concrete abstract instruction for students with math disabilities. *Learning Disabilities Research and Practice*, *8*, 89–96. doi: 10.1111/1540-5826.00068
Montague, M., & Applegate, B., (2000). Middle school students' perceptions, persistence, and performance in mathematical problem solving. *Learning Disability Quarterly*, *23*, 215–227. doi: 10.2307/1511165
Morgan, P. L., Farkas, G., & Wu, Q. (2009). Five-year growth trajectories of kindergarten children with learning difficulties in mathematics. *Journal of Learning Disabilities*, *42*(4), 306–321. doi:10.1177/0022219408331037
National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers. (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. Washington, DC: Author. Retrieved from http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf.
National Mathematics Advisory Panel. (2008). *Foundations for success: The final report of the National Mathematics Advisory Panel* (ED 00424P). Washington, DC: U.S. Department of Education.
National Research Council. (2009). *Mathematics learning in early childhood: Paths toward excellence and equity*. Washington, DC: National Academies Press.
OECD (2016), Equations and Inequalities: Making Mathematics Accessible to All, PISA, Paris: OECD Publishing. doi: 10.1787/9789264258495-en
Powell, S. (2011). Solving word problems using schemas: A review of the literature. *Learning Disabilities Research & Practice*, *26*, 94–108. doi: 10.1111/j.1540-5826.2011.00329.x

Robinson, C. S., Menchetti, B. M., & Torgesen, J. K. (2002). Toward a two-factor theory of one type of mathematics disabilities. *Learning Disabilities Research & Practice*, *17*(2), 81–89. doi:10.1111/1540-5826.00035.

Schiff, R., Bauminger, N., & Toledo, I. (2009). Analogical problem solving in children with verbal and nonverbal learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, *42*(1), 3–13. doi: 10.1177/0022219408326213

Starkey, P., Klein, A., & Wakeley, P. (2004). Enhancing young children's mathematical knowledge through a pre-kindergarten mathematics intervention. *Early Childhood Research Quarterly*, *19*(1), 99–120. doi:10.1016/j.ecresq.2004.01.002.

Van Garderen, D. (2007). Teaching students with LD to use diagrams to solve mathematical word problems. *Journal of Learning Disabilities*, *40*, (540-553). doi: 10.1177/00222194070400060501

**Parvaneh Amiripour** is PhD student in the Department of Mathematics, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran.

**John A. Dossey** is emeritus professor in the Department of Mathematics, at Illinois State University, USA.

**Ahmad Shahvarani** is associated professor in the Department of Mathematics, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran.

**Contact Address:** Direct correspondence concerning this article, should be addressed to the author. Postal address: Department of Mathematics, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran. **Email**: parvaneh.amiripour@gmail.com , Maths_Ahmad@yahoo.com

Instructions for authors, subscriptions and further details:

http://redimat.hipatiapress.com

# La Base de Orientación en la Resolución de Problemas: "Cuando me Bloqueo o me Equivoco"

Joana Villalonga[1] and Jordi Deulofeu[1]

1) Universitat Autònoma de Barcelona

Date of publication: October 24th, 2017
Edition period: October 2017-February 2018

**To cite this article:** Villalonga, J., & Deulofeu, J. (2017). La base de orientación en la resolución de problemas: "Cuando me bloqueo o me equivoco." *REDIMAT*, *6*(3), 256-282. doi: 10.1783/redimat.2017.2262

**To link this article:** http://dx.doi.org/10.17583/redimat.2017.2262

*REDIMAT, Vol. 6 No. 3 Octubre 2017 pp. 256-282*

# La Base de Orientación en la Resolución de Problemas: "Cuando me Bloqueo o me Equivoco"

Joana Villalonga
*Universitat Autònoma de Barcelona*

Jordi Deulofeu
*Universitat Autònoma de Barcelona*

(*Recibido: 14 Septiembre 2016; Aceptado: 06 Octubre 2017; Publicado: 24 Octubre 2017)*

**Resumen**

Ante los indicios de que el uso de una adecuada base orientación contribuye en la adquisición de la competencia de resolución de problemas, con el presente artículo se pretende examinar parte de aquellos indicios que contribuyen a dicha afirmación al tiempo que profundizar en su interpretación. Para ello se consideran las resoluciones de un problema matemático utilizando una base de orientación por alumnos de entre 11 y 13 años de edad. El estudio se centra en explorar cómo la dimensión dedicada al atasco, que comprende el común error y el temido bloqueo, se ve reflejada en las resoluciones de los alumnos. El análisis llevado a cabo confirma la importancia de la dimensión dedicada al atasco en la base de orientación y su implicación tanto en el proceso de aprendizaje de los alumnos como en la práctica de los docentes. Entretanto, se obtiene una clasificación de las distintas situaciones de atasco y su vinculación con las nueve dimensiones de la base de orientación utilizada.

**Palabras Clave:** Atasco, autorregulación, base de orientación, resolución de problemas

2017 Hipatia Press
ISSN: 2014-3621
DOI: 10.17583redimat.2017.2262

*REDIMAT, Vol. 6 No. 3 October 2017 pp. 256-282*

# The Orienting Base in Problem Solving: "When my Mind Goes Blank or I Make a Mistake"

Joana Villalonga
*Universitat Autònoma de Barcelona*

Jordi Deulofeu
*Universitat Autònoma de Barcelona*

(*Received: 14 September 2016; Accepted: 06 October 2017; Published: 24 October 2017)*

## Abstract

In light of the use of an appropriate orientation basis contributes to the acquisition of problem solving competency, the aim of the present study is to examine and go more deeply into some of those signs that contribute to this statement. For this purpose, students between 11 and 13 years old solved a mathematics problem using an orientation basis. The study explores how the dimension of the orientation basis responsible for the fact of getting stuck (characterized as doing an error or when the mind goes blank) is reflected on students' solutions. The analysis of the students' solutions reveals that orientation basis addressed to mathematics problem solving must not avoid an explicit dimension comprising the fact of getting stuck. Moreover, it reveals implications for both students and teachers. While doing so, a classification of six different stuck situations and its relationship with the nine dimensions of the orientation basis are obtained.

**Keywords:** Getting stuck, self-regulation, orientation basis, problem solving

2013 Hipatia Press
ISSN: 2014-3621
DOI: 10.4471/redimat.2017.2262

El presente artículo forma parte de un estudio más amplio centrado en caracterizar propuestas de trabajo que permitan mejorar la adquisición de la competencia de resolución de problemas en la transición de la Educación Primaria a la Educación Secundaria a través de acciones del profesorado relacionadas con el diseño del material (problemas) y su aplicación en el aula de manera que comporten un aprendizaje significativo y competencial.

Un estudio previo (Villalonga y Deulofeu, 2015) dio indicios de cómo el uso de una adecuada base de orientación al resolver un problema puede resultar una buena herramienta, así como una práctica satisfactoria en la adquisición de la competencia en resolución de problemas. En este sentido, se percibió que, si bien es verdad que no hay una *receta* general para resolver problemas, el uso de una base de orientación apropiada permite al *resolutor* no experto considerar e indagar entre las herramientas y procedimientos matemáticas de qué dispone, proporcionándole seguridad, control y serenidad, a la vez que ayudarle a organizarse en la tarea que debe afrontar. Por ello, con el tiempo y la práctica, puede mejorar su competencia matemática de resolver problemas.

La base de orientación utilizada enfatiza la necesidad de revisar la tarea que con ella se pretende desarrollar, resolver el problema, con el objetivo de que el *resolutor* no experto adquiera el control necesario, y aprenda a detectar los puntos dónde se bloquea o comete un error, al mismo tiempo que le permita centrarse en encontrar una alternativa y así, con el tiempo, hacerse con dicha dinámica. El análisis de este proceso mediante evidencias de su puesta en práctica, debería no sólo poder discernir cuáles son las dificultades más comunes en el alumnado y su destreza en reconducirlas, sino también exponer cómo permite a los docentes adecuar sus propuestas y desarrollo de actividades.

Para ello, en este artículo se presentan evidencias de uso de una base de orientación para resolver un problema matemático contextualizado en la numeración y el cálculo por parte de los alumnos de una clase de 6º de Educación Primaria (11-12 años) y dos de 1º de Educación Secundaria Obligatoria (12-13 años) con su correspondiente análisis. Con ello, se pretende evidenciar y justificar la importancia del estudio de los errores o momentos de bloqueo en los que los alumnos pueden verse involucrados durante la resolución de un problema. Al tomar consciencia de sus dificultades y con su posterior esfuerzo de rectificación siguiendo la base de orientación, los alumnos profundizan en la adquisición de la competencia que se pretende. Los docentes, en tanto, adquieren una herramienta para identificar mejor las carencias de su alumnado y, en consecuencia, de los materiales de trabajo, su gestión en el aula y evaluación, pudiendo así adaptarlos mejor, tanto a nivel de cada alumno como en el conjunto de la clase.

Mencionar aquí que con el término general *el/los alumno/s* nos referimos indistintamente al alumnado de ambos sexos y que con el término *resolutor* nos referimos a cualquier persona que pretende resolver un problema. En este sentido, entendemos *problema matemático* por una pregunta matemática presentada en un contexto determinado para la que no se tiene respuesta inmediata o rutinaria.

## Marco de Referencia

### La Resolución de Problemas

La resolución de problemas es una tarea compleja y difícil de orientar. Diferentes son los estudios que se han realizado para hacerle frente. Si bien los primeros trabajos se centraron en describir los procesos necesarios para la resolución de problemas, los posteriores se han focalizado en la identificación de aquellas singularidades de quiénes resuelven los problemas que contribuyen a su éxito. Los estudios más actuales sitúan la planificación y el monitoraje como factores clave en el éxito de la resolución de problemas, así como la influencia de dimensiones afectivas como las creencias, actitudes y emociones (De Corte et al., 2000a 2000b; Schoenfeld, 2007, 2013).

Un problema matemático es, para nosotros, un tipo de pregunta que requiere, por parte de quien lo resuelve, un proceso de investigación matemática (Niss y Højgaard, 2011). Por ello, se hace imprescindible distinguir entre un problema, cuando uno no sabe cómo resolverlo, y un ejercicio, cuando la tarea se puede resolver de manera familiar o rutinaria mediante la aplicación de técnicas o algoritmos, más o menos complicados, pero automatizados (Schoenfeld, 1983). Un problema matemático debe invitar a la búsqueda y, en su resolución tiene que haber una chispa de descubrimiento que permita experimentar el encanto de alcanzar el camino para solucionarlo (Burgués y Serramona, 2013).

En relación a las peculiaridades que definen un buen resolutor de problemas, cuatro cualidades han sido especialmente destacadas: el conocimiento de uno mismo, las estrategias de resolución que uno posee (estrategias heurísticas), el propio monitoreo y la autorregulación (aspecto metacognitivo), y las creencias y experiencias previas de uno mismo ante cualquier aspecto de las matemáticas, en general, y de la resolución de problemas, en particular (Schoenfeld, 2013; De Corte et al., 2000b). En este sentido, cabe destacar obras como las de Mason et al. (1982) en la que se introduce la actividad de razonar a través del papel de un monitor interno como si se tratara de un agente independiente al resolutor que va aconsejando qué se debe hacer en cada momento, pero que, de hecho, se vigila y se realiza las preguntas por sí mismo, desarrollando así una regulación personal del proceso.

## La autorregulación

Resolver un problema, como cualquier otra actividad humana, se puede interpretar como un ejemplo de comportamiento dirigido a un objetivo (Schoenfeld, 2007) que requiere la activación de múltiples conocimientos y estrategias (Sanmartí, 2002). Resolver un problema implica un objetivo orientado a una actividad dinámica (Schoenfeld, 2007) en la cual intervienen diversas etapas, no necesariamente desarrolladas en un orden determinado (Burgués y Serramona, 2013). En este sentido, a pesar de que el conocimiento es la base de todo comportamiento competente, la importancia recae en cómo éste se organiza y se accede a él (Schoenfeld, 2007). Antes de iniciar un proceso es necesario prever los posibles caminos a seguir, sus etapas intermedias, así como sus posibles resultados. Esta previsión permite no sólo escoger el camino a seguir sino también el orden de las acciones necesarias para aplicarlo (Sanmartí, 2007). Por ello, la resolución de un problema recae no sólo en los conocimientos de quién lo resuelve sino también de sus objetivos, orientaciones y toma de decisiones (Schoenfeld, 2007). Luego, las habilidades metacognitivas de los alumnos resultan agentes autorreguladores de su aprendizaje en resolución de problemas.

Sin embargo, las evidencias muestran que dichas habilidades reguladoras con frecuencia están ausentes, especialmente en los aprendices más débiles (De Corte y Verschaffel, 2003). Una mayoría de alumnos manifiestan gran inseguridad ante la resolución de un problema, y no terminan los procesos iniciados (Sanmartí, 2002). El principal motivo sitúa la causa en la incapacidad de planificar la tarea que se les propone, debido a que realizan las tareas aplicando diferentes maneras de hacer o de razonar, sin suficiente coherencia ni orden, siguiendo procesos algorítmicos vacíos (Sanmartí, 2002). Cuando dedican más tiempo a pensar y a planificar la estructura de la resolución que no en efectuar los cálculos, acostumbran a resolver mejor los problemas (Sanmartí, 2002), lo que responde al perfil de resolutor experto, caracterizado por invertir mayor tiempo en el análisis del problema, con el objetivo de comprender de qué se trata, y en la planificación del proceso de resolución (Schoenfeld, 2007; De Corte et al., 2000b). Además, con esta anticipación de la acción no solo se obtienen mejores resultados, sino que la tarea resulta más gratificante (Sanmartí, 2002). Por ello, es necesario ayudar a los alumnos aprender a planificar, un proceso que implica la generación de sub-objetivos necesarios para resolver problemas complejos (De Corte et al., 2000b).

Otra de las peculiaridades del resolutor experto es su capacidad de reflejar continuamente sobre el estado de su proceso de resolución (Schoenfeld, 2007; De Corte et al., 2000b). Sin embargo, los alumnos raras veces verbalizan cómo plantean o pretenden resolver un problema, (Sanmartí; 2002). Por ello es necesario capacitarles para que utilicen formas de representación con las que describir y argumentar de manera coherente sus actuaciones y objetivos, y así poder actuar e intervenir de manera consecuente (Sanmartí; 2002). El hábito de ir escribiendo es una garantía para recuperar posteriormente el curso de las propias ideas (Mason et al., 1982).

De todo ello se concluye que los alumnos no se convierten de manera automática o espontánea en aprendices autorregulados (De Corte y Verschaffel, 2003). Se trata de un proceso a largo plazo que constituye en sí mismo un importante objetivo de aprendizaje. Por ello debería ser inducido desde una edad temprana (De Corte y Verschaffel, 2003) y velar por la adquisición de la autorregularización. Es decir, que todo alumno, frente a un nuevo problema que exija aplicar conocimientos aprendidos, fuera capaz de anticipar y planificar las operaciones necesarias para resolverlo (Sanmartí, 2007). Schoenfeld (2013) asegura que con las correctas directrices los alumnos pueden convertirse en resolutores más eficientes de problemas. Para conseguirlo, como añade el autor, resulta imprescindible disponer de la comprensión de *cómo funcionan las cosas* (Schoenfeld, 2013). En este sentido, la modelización del profesor es un factor esencial en el logro de la autorregulación e implica un cambio profundo en las creencias y actitudes hacia la enseñanza (De Corte y Verschaffel, 2003). En consecuencia, sólo con la inmersión de los alumnos en un nuevo entorno de aprendizaje, será posible fomentar sus habilidades de autorregulación cognitivas (De Corte et al., 2000b).

## La base de orientación

Con el fin de orientar los alumnos a llevar a cabo una tarea, Sanmartí (2007) presenta las bases de orientación (llamadas también guías de navegación o cartas de estudio). Tal como presenta la autora, una base de orientación es aquel instrumento que resume de manera gráfica y ordenada la acción a realizar, con el fin de promover que los alumnos anticipen y planifiquen por sí mismos las operaciones que deben llevar a cabo para resolver con éxito los diferentes tipos de tareas escolares. Además, a lo largo del proceso de enseñanza se debe promover su construcción de forma que cada alumno elabore la suya propia para que pueda percibirla como una herramienta útil y particular a sus necesidades, más que como una colección ordenada de instrucciones (Sanmartí, 2007).

Concebimos, así, una base de orientación para la resolución de problemas como una secuencia resumida y ordenada de acciones cuidadosamente pensada, fundamentada en los requerimientos, que un experto puede identificar, de la tarea a realizar y en las necesidades del alumnado, que lleva a resolver un problema de manera satisfactoria, convirtiéndose para el aprendiz en una herramienta útil para la planificación y autonomía, así como para la autoevaluación.

Así, toda base de orientación debe desplegar el conocimiento que los aprendices han de interiorizar con su ayuda (Sanmartí, 2002). Luego, las bases de orientación se convierten en agentes reguladores de la capacidad que se pretende lograr con el proceso de enseñanza. En consecuencia, su evaluación se convierte en un proceso imprescindible para la mejora del proceso de enseñanza y aprendizaje.

## La gestión del atasco

En su propuesta de cómo atacar un problema matemático de manera eficaz y cómo ir aprendiendo de la experiencia, Mason et al. (1982) hacen continua referencia al hecho de quedarse atascado, como algo inevitable que sucede a cualquiera y que no debe esconderse. A pesar de ello, la realidad indica que se trata de una situación poco comprendida y aceptada en las aulas, especialmente por los resolutores no expertos, pues a menudo es motivo de frustración y de abandono (Mason et al., 1982). De hecho, en la escuela el *error*, como tradicionalmente se conoce el desacierto o confusión durante el desarrollo de un proceso, se tiende a considerar como algo negativo que los alumnos aprenden rápidamente a ocultar para no ser penalizados (Sanmartí, 2007). Sin embargo, el error es el fundamento del desarrollo cultural de la humanidad. Cada individuo construye sus ideas a partir de sus percepciones e interacciones con otros y para llegar a compartir el conocimiento elaborado deben superarse obstáculos de tipología diversa (Sanmartí, 2007). De hecho, se ha comprobado que los alumnos que tienen éxito en la escuela se caracterizan por su capacidad para identificar y corregir sus errores. Luego, como no todos los estudiantes desarrollan por si mismos esta capacidad, el reto del docente es comprender sus causas, porque sólo ayudándoles a reconocerlas será posible aprenderlos a corregir (Sanmartí, 2007).

La mejor preparación para hacer frente a una situación de atasco es reconocerlo y aceptarlo. Sólo luego será posible reflexionar sobre las ideas y momentos clave que puedan ser el principio de un nuevo y útil enfoque. Para ello, al intentar resolver un problema, conviene tomar especial nota de los caminos que no lleven a ninguna parte, presentando cada línea de pensamiento lo más elaborada y completa como sea posible, expresándola con claridad y lógica (Mason et al., 1982). Así, en cualquier momento de la resolución, será posible comprobar si se ha omitido algo relevante, si se han deslizado errores, o si es necesario dejar el problema por un tiempo, para retomarlo posteriormente sin perder el trabajo realizado. Descubrir un error o algo inadecuado permite retomar cualquier punto de la resolución. El objetivo es descubrirlo, reflexionar y buscar alternativas (Mason et al., 1982).

En definitiva, el *error* es útil (Sanmartí, 2007) y *atascarse* es un estado honorable y positivo, del que se puede aprender mucho (Mason, et al., 1982). Es un buen indicador de los procesos intelectuales con los que el alumno afronta la realización de una actividad y, por lo tanto, del desarrollo de la misma, pero, para que se pueda detectar, comprender y favorecer su regulación conviene estimular su expresión (Sanmartí, 2007).

## Los Agentes Implicados

El análisis y posterior reflexión que se pretenden con este estudio surgen de las evidencias de uso una base de orientación para resolver un problema matemático. En esta sección se describen los distintos agentes que han intervenido en dicha aplicación.

### Los Participantes

Las evidencias que se presentan provienen del alumnado de tres aulas de tres centros educativos distintos de Barcelona al resolver un problema utilizando una base de orientación. Una de las tres aulas corresponde a un 6º curso de Educación Primaria (EP), alumnado de 11 y 12 años de edad; y las otras dos con aulas de 1º de Educación Secundaria Obligatoria (ESO), alumnado de 12 y 13 años.

Tabla 1.
*Muestra del estudio*

| Problema | Grupo | Curso | [i]AL. | [ii]PROF. | [iii]RRR |
|---|---|---|---|---|---|
| Problema 1 | NB6A | 6º EP | 22 | 1 | 21 |
| | SC1A | 1ºESO | 31 | 1 | 24 |
| | AL1C | 1ºESO | 23 | 1 | 20 |

[i] –PROF.: Número de profesores en el aula. [ii] AL-Número de alumnos matriculados al inicio del curso escolar. [iii] –RRR-Resoluciones realizadas recibidas.

Cabe destacar que, en los tres casos, como es habitual en España, había sólo un profesor en el aula, siendo éste el colaborador con el estudio que presentamos. En la Tabla 1 se detalla la información relativa a cada uno de estos grupos.

No sólo los tres docentes implicados, sino también la realidad de cada una de sus aulas era diferente. NB6A corresponde a un grupo de 6º de Primaria de un colegio, mientras que SC1A y AL1C son dos grupos de 1º de la ESO de dos institutos diferentes. El docente del grupo NB6A es maestro, el docente de SC1A es profesor y el del AL1C era maestro que, en su momento, promocionó a trabajar en los primeros cursos de la secundaria. En NB6A trabajan las matemáticas de manera transversal, a través de proyectos, en los que se integra de manera implícita el trabajo con problemas. En SC1A y AL1C trabajan las matemáticas de manera específica, no siguen ningún libro de texto y los alumnos deben tomar apuntes. En el caso de SC1A se facilita un dossier de referencia elaborado por el propio departamento del centro que incluye problemas seleccionados por los profesores. En AL1C se facilitan los problemas que se consideran en cada momento. El docente de AL1C comenta que suele proyectar los enunciados de los problemas, utilizan bastante la calculadora en la resolución de problemas y que suele poner problemas fuera de temario para trabajar de manera voluntaria. SC1A comenta que en su clase no hay una práctica de resolución de problemas individual estricta y que intenta no intervenir mientras los alumnos trabajan los problemas. Destaca mucha falta de autonomía en el proceso de resolución y de aceptación del error. En cualquier de los casos, tanto para docente como alumnos, el uso de una base de orientación para resolver un problema fue una novedad.

## El Problema

Bajo la concepción de que un problema (matemático) debe suponer una propuesta de enfrentamiento con una situación desconocida, planteada mediante un conjunto de datos dentro de un contexto (matemático o no) para la cual no se dispone de una respuesta inmediata si no que requiere reflexionar, tomar decisiones y diseñar estrategias, se propuso un enunciado contextualizado en la misma matemática que conlleva la experimentación numérica. A nuestro juicio, para los alumnos de los cursos implicados la situación propuesta promueve una acción de descubrimiento para la cual no tienen una manera directa de resolverlo, pero sí de disponer los conocimientos que, utilizados de manera oportuna, permitan discutirlo y llegar a alguna conclusión.

Tabla 2.
*Enunciado del problema*

| Problema |
|---|
| Con las cifras 3, 5, 6, 7, 8, 9, y sin repetir ninguna, podemos formar, al mismo tiempo, dos números de tres cifras cada uno. Por ejemplo, el 368 y el 579.<br>¿Cuáles son estos dos números si queremos obtener la suma y la multiplicación más grandes posibles a la vez? ¿Cómo has llegado a esta conclusión? Explícalo. |

Se consideró oportuno adecuar el problema al ámbito matemático en el cual los alumnos pudieran sentirse más cómodos y para el que tuvieran asimiladas más herramientas. En este sentido, Numeración y el Cálculo se correspondía con el bloque curricular que en primer lugar se trabajaba en todos los cursos implicados y el que, de alguna manera, no dejaba de trabajarse a lo largo del curso escolar en todos los niveles. De ahí que el problema considerado curricularmente encaje en dicho bloque. Por otro lado, y porque los problemas contextualizados en la misma matemática, como los que no, deben también de ser aceptados y suscitar motivación al alumnado, se optó por contextualizar el problema en la misma matemática, a modo de entretenimiento numérico.

## La Base de Orientación

La base de orientación utilizada se basa en las ideas de Pólya (1945), complementadas por las observaciones de De Corte et al. (2000b) y De Corte y Verschaffel (2003), y las propuestas de Mason et al. (1982). Además, se ha construido de acuerdo con los procesos de resolución que, de manera general, se han observado previamente en el alumnado de las edades consideradas. Con todo ello, se han determinado tres dominios de actuación para cada uno de los cuales se han identificado tres aspectos característicos y fundamentales, descritos como dimensiones.

En la resolución de un problema, Pólya (1945) determina cuatro fases: entender el problema, concebir un plan de acción, llevar a cabo el plan de acción y volver la mirada atrás. De la primera fase deriva nuestro primer dominio *Comprendo el problema* que, probablemente debido a su aparente obviedad, a menudo se pasa por alto cuando es un punto clave en la resolución de todo problema (De Corte, 2000b; Mason et al., 1982; Pólya, 1945; Sanmartí, 2007). De la segunda y tercera fase, emerge nuestro segundo dominio *Tengo un plan de acción*, cuya finalidad abarca el hecho de encontrar una estrategia de resolución, con todo lo que ésta requiera, y así desarrollarla y describirla. La dificultad observada en los alumnos para conceptualmente separar planificación y acción, y bajo las propuestas de Mason et al. (1982), se convino su unión. Finalmente, la visión retrospectiva del proceso, que conlleva la revisión de la tarea realizada y así da nombre al tercer y último dominio de la base de orientación.

La base de orientación se presenta en forma de tabla listada (Tabla 3). Tal como se recalcó a profesores y alumnos (quienes, a su vez, fueron partícipes de su diseño y redacción final), dicha presentación no obliga que los pasos descritos deban mantenerse de forma estricta para resolver el problema. La linealidad establecida, cuyo orden se sustenta por las fuentes usadas y que describen los pasos de un resolutor experto, se convino para posibilitar un orden de aplicación, evitar dispersiones, y al mismo tiempo establecer de manera clara y precisa la relación entre dominios, dimensiones, y ambos. Así mismo, como se puede extraer de ella misma (dimensiones 7 y 8, especialmente), dicho orden puede quedar alterado y ser reconducido en cualquier momento. De aquí la naturaleza cíclica de resolución de un problema que algunos autores como De Corte et al. (2000a) remarcan.

La descripción de las dimensiones se ha hecho utilizando el presente de indicativo y la primera persona del singular. Con ello se pretende que el resolutor perciba al máximo la proximidad a la persona (ella misma) y al tiempo de resolución (el mismo que su uso).

Tabla 3.
*Base de orientación utilizada*

| Resolución de problemas | |
|---|---|
| Dominios (D) | Dimensiones (d) |
| Comprendo el problema | [d1]Distingo las preguntas que he de responder y entiendo todo aquello que se me pide que haga.<br>[d2]Distingo los datos y me aseguro que los entiendo.<br>[d3]Expreso el problema para entenderlo mejor haciendo un dibujo, esquema, diagrama... (lo que me parezca más adecuado) y hago pruebas si me es necesario. |
| Para cada pregunta formulada | |
| Tengo un plan de acción | [d4]Pienso alguna estrategia de resolución a partir de la representación y las pruebas o ejemplos que he hecho, y trato de aplicarlo.<br>[d5]Encuentro los datos y los razonamientos y/o algoritmos que necesito para aplicar la estrategia.<br>[d6]Aplico la estrategia y la escribo de manera que se entienda todo aquello que he pensado. |
| Reviso mi tarea | **[d7]Si no lo consigo, detecto dónde me bloqueo o me equivoco y aplico una nueva estrategia (con todo lo que necesite).**<br>[d8]Una vez resuelto,<br>• investigo si hay otras soluciones y las encuentro. Si sólo hay una, razono porque no hay más.<br>razono si se podría hacer de otras maneras.<br>[d9]Releo lo que he hecho, y me aseguro que lo explico todo, que respondo de manera razonada y que se entiende. Relaciono, si hace falta, con el resto de preguntas y tareas solicitadas. |

La reflexión que conlleva el presente estudio surge de la primera de las tres últimas dimensiones de la base de orientación *Si no lo consigo, detecto dónde me bloqueo o me equivoco y aplico una nueva estrategia (con todo lo que necesite)*, encargada de ayudar a gestionar los momentos de atasco del resolutor al resolver el problema. Los diferentes matices referidos a un estado de atasco y el interés en que el alumnado se familiarice con ellos, explican por qué en la dimensión el término atascarse se presenta explícitamente como el hecho de equivocarse, de cometer un error, o bien de bloquearse, cuando aparece un momento de confusión. Así mismo, como se ha argumentado anteriormente, cualquier momento de atasco es una situación poco considerada, que requiere de asentamiento, dominio y reflexión de uno mismo y de los procesos que uno lleva a cabo, para la que es imprescindible una mirada atrás, profunda y desde su inicio. De ahí su ubicación en el tercer y último dominio de la base de orientación *Reviso mi tarea*.

## Obtención de los Datos

La resolución del problema se realizó en una sesión de clase, en el último trimestre del curso 2014-2015. Tanto la base de orientación como el problema utilizados surgen de un proceso de refinamiento, mejor adecuación y consenso con el profesorado implicado después de una primera aplicación durante el 1r Trimestre del mismo curso escolar (Villalonga y Deulofeu, 2015). Con ello, se adecuó la redacción del problema y, por otra, se simplificó la base de orientación para mejorar su comprensión y agilizar su lectura.

Antes de iniciar el proceso de resolución, el profesorado implicado, que previamente se había familiarizado con la herramienta, debía presentar la base de orientación a su alumnado para discutirla con ellos. Era imprescindible asegurarse que tanto el vocabulario y las expresiones utilizadas, como el sentido de la misma fuesen entendidos por los alumnos. En este caso, la base de orientación fue entendida y bien recibida por el alumnado. Para que los alumnos tuvieran acceso a la misma durante la resolución del problema, cada uno de ellos disponía de una copia en papel, para utilizar a su conveniencia. Posteriormente, se debía presentar el problema (Tabla 2) para que cada alumno lo resolviera por escrito y de manera individual, siguiendo la base de orientación. También se facilitó a cada alumno una copia impresa del enunciado del problema, donde debían exponer su proceso de resolución. Con el fin de poder acceder al máximo a sus procedimientos y razonamientos, se requería escribir en bolígrafo y no borrar nada de lo escrito. En caso de modificar algo, debían hacer una marca y, si fuera necesario, un pequeño comentario, pero no borrarlo o taparlo. Finalmente, se sugería que se hiciera una revisión por parejas de la resolución del problema, considerando la base de orientación y utilizando un bolígrafo de otro color, preferiblemente, verde.

## Resultados

De las diferentes resoluciones al problema planteado con la base de orientación, han surgido interesantes evidencias en relación a la dimensión dedicada al atasco, caracterizada en nuestro estudio como *Si no lo consigo, detecto dónde me bloqueo o me equivoco y aplico una nueva estrategia (con todo lo que necesite)*. Por la naturaleza del escenario de investigación, en el cual analizamos las resoluciones del alumnado en relación a las herramientas descritas y nos centramos en aquello que concierne a la dimensión detallada, hemos optado por una metodología de análisis cualitativo de las explicaciones redactadas por el alumnado. En este sentido, y siendo fieles a la dinámica más usual en las tres aulas participantes en las que el profesorado de matemáticas percibe mayoritariamente el trabajo de sus alumnos a través de sus escritos, los datos analizados proceden directamente y exclusivamente de aquello que cada alumno escribió en el/los documento(s) dónde desarrollaron su resolución y en el que, posteriormente, un compañero pudo añadir las conclusiones extraídas de la puesta en común.

La finalidad del presente estudio es doble. Por un lado, como acción de investigación, aportar evidencias y discusión significativas a la comunidad investigadora en relación al proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, concretamente, en la adquisición de la competencia en resolución de problemas. Por otro, compartir las herramientas diseñadas para el estudio y su correspondiente análisis con la comunidad educativa, con el propósito que puedan ser adecuadas y utilizadas en la práctica docente habitual.

Tabla 4.
*Situaciones de atasco identificadas*

| | |
|---|---|
| Falta de comprensión | Percatarse de no entender la situación descrita del problema, alguna de sus partes o de los datos que presenta. |
| Representaciones inadecuadas | Advertir que la representación (expresión o pruebas) realizada de la situación descrita del problema no se corresponde con lo expuesto en dicha situación. |
| Estrategia inadecuada | Notar que la estrategia utilizada no es adecuada para la finalidad que se pretende resolver. |
| Datos o razonamientos inapropiados | Apreciar que se consideran datos o razonamientos no adecuados para aplicar una estrategia. |
| Errores de aplicación | Reparar que se cometen errores de aplicación. |
| Explicaciones imprecisas | Percibir que la exposición de las descripciones (explicaciones, conclusiones…) son confusas, impropias o que contienen partes incorrectas o inadecuadas, ya sean de lengua (expresión escrita) o de carácter matemático. |

Para dar respuesta a ello, se ejemplifican con partes de las mismas resoluciones, los diferentes tipos de evidencias de atasco (bloqueo o error) encontrados. Concretamente, se han buscado aquellos fragmentos de las resoluciones donde se ha observado que el resolutor debió parar puntualmente su desarrollo, ya sea debido a un momento de confusión (situación de bloqueo) o por haber realizado algo de manera incorrecta (error). En definitiva, se ha tratado de discernir cómo actuaron los resolutores en encontrarse ante una situación de atasco, teniendo en cuenta que disponían de la ayuda de la base de orientación. De las sugerencias de Mason et al. (1982) y de las observaciones de Sanmartí (2007), podemos avanzar que el hecho de que el estudiante evidencie que se da cuenta de un estado de atasco da sentido a la dimensión estudiada y, con ello, al uso y aceptación de la base de orientación. Una vez reconocido el bloqueo o el error, la atención recae en cómo se actúa ante ello. En este sentido, el objetivo final persigue que, con la base de orientación, el alumno no sólo sea capaz de detectar una situación de atasco, sino de esforzarse en reconducirlo de manera satisfactoria.

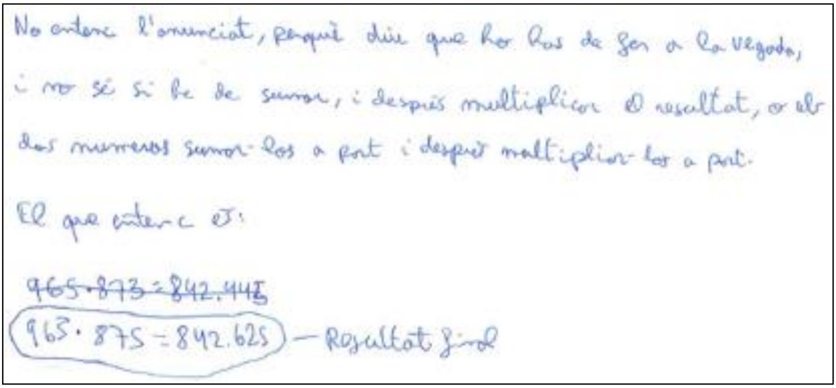
De acuerdo con lo expuesto, identificamos las seis situaciones que se exponen en la Tabla 4.

Para describir los seis tipos de atasco identificados, presentamos y analizamos aquellos fragmentos de las distintas resoluciones más representativos para cada tipo definido. Por cuestiones de espacio, nos limitamos a comentar no más de dos ejemplos por cada tipo.

**Falta de Comprensión**

En cada una de estas dos resoluciones, la evidencia más clara de que la situación descrita por el enunciado no es entendida inicialmente, es que ambos alumnos lo manifiestan por escrito. En el primer caso (Figura 1) el alumno hace el esfuerzo de describir qué le conduce al bloqueo. Exponer su confusión y pautar lo que cree que entiende le ayuda a enfocar correctamente el problema.

En el segundo (Figura 2), en lugar de describir el motivo del bloqueo, propone inicialmente una operación combinada de suma y multiplicación con tres números de una cifra (de las seis dadas) cada uno, y se percata que no concuerda con lo descrito en el enunciado; esto le lleva a rectificar y concluir que las cifras deben ser unidas para formar números de tres cifras y cumplir las condiciones requeridas en dos operaciones distintas.



No entenc l'enunciat, perquè diu que ho has de fer a la vegada, i no sé si he de sumar, i després multiplicar el resultat, o els dos numeros sumar-los a part i després multiplicar-los a part.

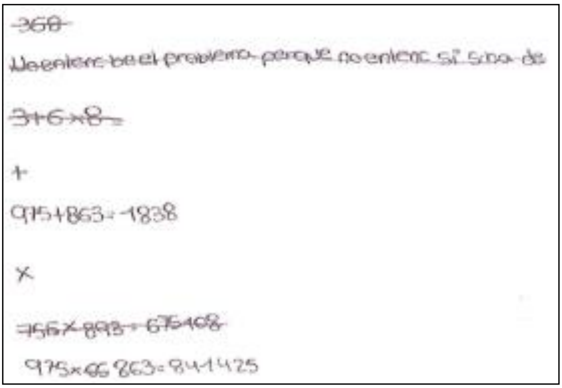
El que entenc és:

~~965·873=842.445~~

963·875=842.625 — Resultat final

*Figura 1*. Parte de la resolución SC1A22[1]

Con ello se evidencia que el hecho de expresar por escrito un estado confusión, y además describir los motivos de ello, o bien de revisar la manera en qué se manipulan los datos del problema, son claves para poder, primero, detectar, aceptar y entender el estado de atasco, y a continuación poder proseguir con la resolución del problema.



~~368~~

~~No entenc be el problema perque no entenc si s'ha de~~

~~3+6×8=~~

+

975+863=1838

×

~~765×893=675408~~

975×~~86~~863=841425

*Figura 2*. Parte de la resolución SC1A05[2]

**Representaciones Inadecuadas**

En este fragmento de resolución vemos como antes de expresar una suma y una multiplicación con números de tres cifras distintas, se intenta experimentar con la suma de dos números, uno de tres cifras, pero el otro de dos cifras, con dos de ellas (8 y 5) repetidas en los dos números. Decimos *intenta* porque en estas experimentaciones iniciales el alumno no anota el resultado de la operación indicada, lo que nos lleva pensar que ya durante la representación tenía sus dudas sobre cómo representar lo expuesto el problema. El hecho de ir anotando distintas interpretaciones del problema le permitieron percatarse de que éstas no concordaban con lo expuesto realmente en él. En este sentido es imprescindible que cada nueva experimentación sea visible para evitar recaer en el error cometido.


*Figura 3*. Parte de la resolución SC1A04

**Estrategia Inadecuada**

El primer fragmento (Figura 4) evidencia la anulación de una primera estrategia de resolución, mientras que el segundo (Figura 5), que corresponde al mismo alumno, presenta una estrategia alternativa a la primera que, ahora si, es correcta. Si bien la representación del problema está encaminada desde un principio (con los dos números escritos antes de explicitar su primera estrategia da cuenta de que necesita dos números de tres cifras con ninguna de ellas repetida), el alumno se percata de que la estrategia descrita inicialmente no proporciona lo que está buscando, pues los números anotados 987 y 653, son dos números de tres cifras no repetidas, pero no son los que dan la suma y producto máximo. De ahí la modificación de su estrategia inicial a una segunda en la que propone que los dos números de tres cifras más grandes posibles serán los obtenidos al distribuir los dos valores mayores en las centenas, los segundos mayores en las decenas y los últimos en las unidades. Esta estrategia se encamina hacia la obtención de la suma y el producto máximo.

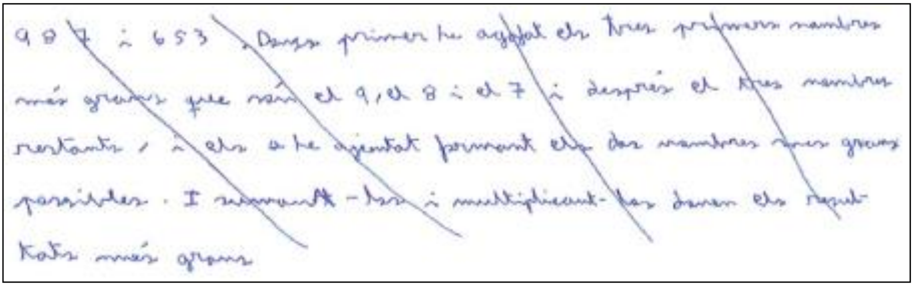



*Figura 4.* Parte 1 de la resolución SC1A14[3]

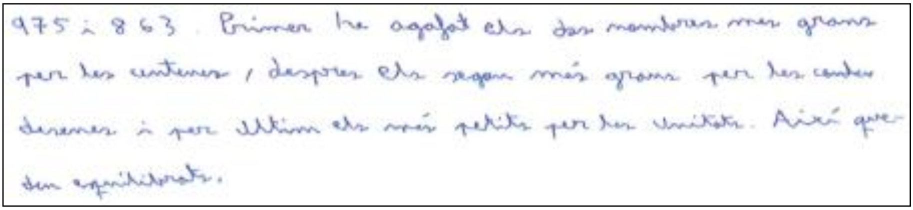



*Figura 5.* Parte 2 de la resolución SC1A14[4]

Constatamos, pues, que explicitar la estrategia a utilizar, permite volver a ella y no sólo detectar la parte equivocada del razonamiento, sino también rehacerla sin repetir el mismo error o abandonar el intento.

## Datos o Razonamientos Inapropiados

No siempre todos los datos aparentes son relevantes para resolver un problema. Hay que saber descifrarlos y utilizarlos de manera conveniente. Así lo percatan los dos ejemplos aquí presentados. Observamos cómo, en ambos casos, el alumno en cuestión rectifica la selección de unos datos que no son relevantes para la tarea que se disponen a desarrollar. En el primer ejemplo (Figura 6), el resolutor explicita que debe trabajar con 6 cifras. Este dato, a pesar que le puede ayudar a comprobar que tiene ese número de cifras qué manipular, no le proporciona información significativa para distribuir las 6 cifras en 2 números de 3 cifras cada uno, y menos para determinar la suma y el producto de mayor valor. De ahí se entiende que acabe tachando dicha información. En el segundo ejemplo (Figura7), vemos un alumno que enfatiza aquellos datos del enunciado que cree relevantes para la resolución subrayándolos en el mismo enunciado. En un primer intento, selecciona los dos números que se habían dado como ejemplo, se da cuenta de que dichos números no satisfacen las condiciones necesarias para resolver el problema y acaba descartándolos. En este sentido, se confirma la necesidad de recordar que no sólo hay que identificar y entender los datos, en general, sino también saber concretar los realmente útiles.

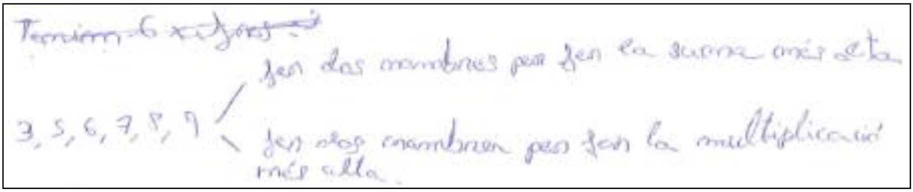



*Figura 6*. Parte de la resolución SC1A13[5]

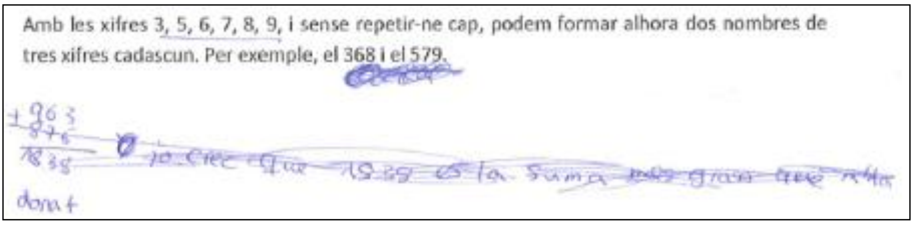



*Figura 7.* Parte de la resolución SC1A30

## Errores de Aplicación

Un ejemplo de error de aplicación se observa en esta realización errónea de un cálculo. Por ello conviene recordar la necesidad de revisar las operaciones y la manipulación de los datos en general. Con la revisión e interpretación de los mismos puedan detectarse y corregirse.

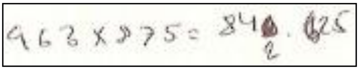


*Figura 8.* Parte de la resolución AL1C16

## Explicaciones Imprecisas

### Precisión de las explicaciones y argumentaciones

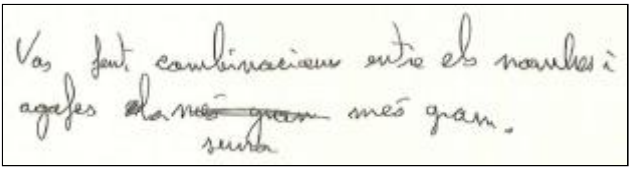



*Figura 9.* Parte de la resolución AL1C05[6]

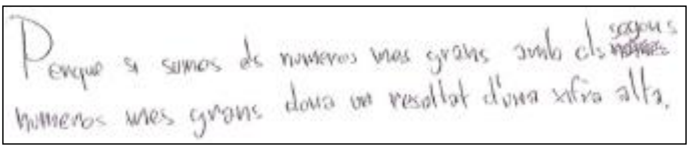



*Figura 10.* Parte de la resolución NB6A09[7]

### Términos y símbolos matemáticos

Al describir un texto son diversas las imprecisiones que pueden surgir. No es de extrañar, pues, que éstas aparezcan también en la redacción de ideas, razonamientos, o conclusiones sobre un problema. En este sentido, los ejemplos expuestos desvelan correcciones en dos sentidos. Por un lado, en la concreción de lo que textualmente se quiere explicar y, por tanto, relacionados con aspectos de la lengua en general, como muestran las Figuras 9 y 10, donde se obvian o anticipan palabras que son clave para la explicación. Por otro, de contexto matemático, ya sea en la precisión de palabras clave, como se ve en la Figura 11, donde inicialmente se utiliza el término decenas en lugar de centenas, o bien al utilizar los símbolos adecuados, como se puede apreciar en las Figura 12, dónde, a pesar de multiplicar, previamente se había indicado una suma. En este sentido, la revisión de los escritos conlleva un asentamiento, adecuación e interpretación del lenguaje, matemático o no, utilizado.


*Figura 11*. Parte de la resolución NB6A01[8]

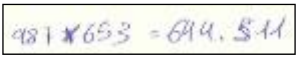


*Figura 12*. Resolución AL1C19

## Discusión y Conclusiones

Ante las evidencias de que el uso de una adecuada base de orientación para resolver un problema contribuye positivamente en la adquisición de la competencia de resolución de problemas (Villalonga y Deulofeu, 2015), el presente artículo ha pretendido examinar parte de aquellos indicios que contribuyen a tal efecto al tiempo que profundizar en su interpretación.
Para ello, nos hemos centrado en el análisis de una de las dimensiones de la base de orientación, la dedicada a la revisión de un posible atasco: *Si no lo consigo, detecto dónde me bloqueo o me equivoco y aplico una nueva estrategia (con todo lo que necesite)*. De acuerdo con Mason et al. (1982) y Sanmartí (2007), las situaciones de desacierto o confusión se conciben, en general, como algo negativo que se aprenden a ocultar. Siendo éstos un

punto clave en cualquier proceso de aprendizaje, y más especialmente en la adquisición de la competencia en resolución de problemas, resulta necesario identificarlos y reconocerlos. En este sentido hemos percibido como en la mayoría de los casos analizados, el hecho de utilizar la base de orientación durante la resolución del problema ha permitido a los alumnos identificar la situación personal de atasco en qué se encontraban, al tiempo que eran capaces de revisar su estado, propiciando la búsqueda de una alternativa que, de manera generalizada, ha supuesto una resolución satisfactoria del problema.

De manera paralela, las evidencias obtenidas confirman la necesidad de que cualquier idea o acción que conlleva resolver un problema debe ser escrita y, en ningún caso, eliminada del discurso de la resolución. De no hacerlo se complica la recuperación de cualquier tipo de atasco, entenderlo y, más aún, tener opción a rectificarlo. En este sentido, las evidencias encontradas muestran como, ante cualquier atasco, el hecho de evidenciar el conflicto emergente ha dado pie a su posible rectificación por parte del mismo resolutor, confirmando así que éste ha reconocido y aceptado su puntual estado. Y, de manera consecuente, que cualquier lector de la resolución pueda también dar cuenta de ello.

Con ello desvelamos la necesidad de que, hasta que los alumnos así lo interioricen, la base de orientación destinada a guiar la resolución de un problema, debe contemplar una dimensión específica para la revisión del tradicional *error* o del temido *bloqueo*, al tiempo que promover que los alumnos dejen por escrito todas sus ideas y propuestas, sin borrar los intentos que consideren inoportunos. Sólo así será posible una posterior lectura de la resolución, y consecuentemente poder interpretar y entender los procedimientos y decisiones llevados a cabo. Será entonces cuando se podrán identificar y reconocer situaciones de dificultad. Esta dinámica es la que, finalmente, permitirá al alumno que resuelve el problema con la base de orientación, no sólo identificar y reconocer situaciones de atasco, sino encontrar una alternativa, generalmente satisfactoria, en lugar de abandonar la resolución del problema. Al mismo tiempo, esta forma de trabajo permite al docente, identificar y (re)conocer con más profundidad las carencias y necesidades de cada alumno y actuar de manera consecuente.

El análisis de los diferentes momentos de error o bloqueo, ha conllevado el reconocimiento de seis situaciones distintas de atasco (Tabla 4) en las que los alumnos, como resolutores de los problemas, se pueden ver involucrados. De ello surgen correspondencias ineludibles entre los seis tipos de atasco descritos (a, b, c, d, e, f en Tabla 4) y el conjunto de dominios y de dimensiones que conforman la base de orientación (ver Figura 13). Si bien una primera lectura evidenció estrechos vínculos entre cada uno de los tipos de atasco con uno de los tres dominios de la base de orientación, una segunda lectura permitió precisar su relación con cada una de las dimensiones de la base de orientación. En este sentido, observamos un estrecho vínculo entre los dos primeros tipos de atasco (a y b) con el dominio dedicado al entender el problema; los tres siguientes tipos de atasco (c, d y e) con el dominio dedicado al plan de acción y; el sexto tipo de atasco (f) con el dominio dedicado a la revisión. Al profundizar, observamos como el primer tipo de atasco (a) afecta las dos primeras dimensiones de la base de orientación, y el segundo (b) la tercera dimensión. Los tipos de atasco c), d) y e) afectan directamente las dimensiones 4, 5 y 6, respectivamente, mientras que el atasco responsable de explicaciones se vincula con la novena dimensión.

Esta correspondencia, descrita por la Figura 13, se convierte en una herramienta que contribuye a entender y a clasificar las dificultades emergentes al resolver un problema y, en consecuencia, guiar la adaptación del material de trabajo (los problemas, la base de orientación y su puesta en práctica en el aula) según la tipología de atasco identificado en cada uno de los alumnos.

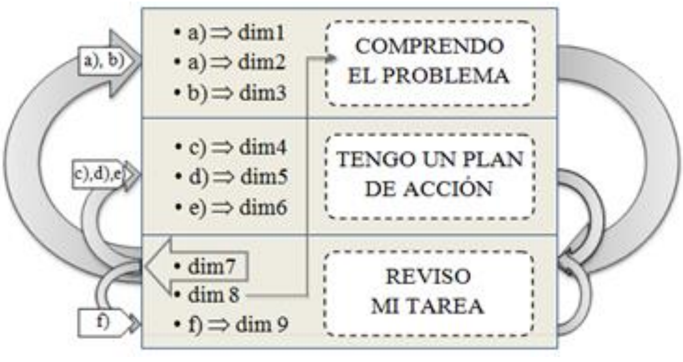



*Figura 13*. Relación entre las situaciones de atasco identificadas y los dominios y las dimensiones de la base de orientación

En este sentido, la identificación de las seis situaciones de atasco (Tabla 4) se convierte en el punto de partida para posibles amplificaciones de la base de orientación considerada, especialmente para profundizar el reconocimiento de la naturaleza y el enfrentamiento a los posibles obstáculos. En otras palabras, la clasificación obtenida se convierte en sí misma una particular base de orientación dedicada a guiar y organizar específicamente el enfrentamiento a las situaciones de atasco cuando aún no se ha interiorizado esta dimensión específica dedicada a los obstáculos, proporcionando así completitud a la base de orientación inicial.

Por otro lado, dichas relaciones confirman la naturaleza cíclica del proceso de resolver un problema (De Corte et al., 2000a), característica no siempre evidente en la comunidad escolar. De hecho, a nuestro modo de ver, el mayor grado de esta articulación recae justo en la detección de un estado cualquiera de atasco. Cada tipo de obstáculo requiere una detección y revisión particular y, por tanto, una rectificación o corrección muy específica del proceso identificado. Se confirma así que la resolución un problema es una dinámica compleja, en ningún caso lineal, que requiere de tiempo, reflexión y dedicación.

Concluimos con la necesidad de promover la revisión del atasco en toda base de orientación, ya que, a través de una adecuada reflexión, permite al profesorado el continuo acompañamiento de sus alumnos en el proceso de aprendizaje para la adquisición de la competencia de resolución de problemas. Si bien con la base de orientación se promueve que el alumno deje por escrito una situación de atasco, también la lectura de cómo éste organiza y usa los datos y expone sus desarrollos, da al docente una información muy valiosa para poder evaluar y, en consecuencia, (re)diseñar y (re)adaptar el material de trabajo, tanto los problemas como la base de orientación a utilizar, realzando así las carencias identificadas, de acuerdo con Sanmartí (2007). Dos herramientas para tal efecto, surgidas del artículo, son: la clasificación de situaciones de atasco (Tabla 4), y los vínculos constatados entre el hecho de la revisión del error y las dimensiones establecidas en la base de orientación (Figura 2).

# Notas

[1] No entiendo el enunciado, porque dice que lo tienes que hacer a la vez, y no sé si se tiene que sumar, y después multiplicar el resultado, o los dos números sumarlos a parte y después multiplicarlos a parte. Lo que entiendo es: ~~965·873=842.445~~ 963·875=842.625 – Resultado final (NdT)
[2] No entiendo el problema porque no entieno si se tiene que (NdT)
[3] 987 y 653. Pues primero he cogido los tres primeros números más grandes que son el 9, el 8 y el 7 y después los tres números restantes, y los he juntado formando los dos números más grandes posibles. Y sumándolos y multiplicándolos dan los resultados más grandes (NdT)
[4] 975 i 863. Primero he seleccionado los dos números más grandes para las centenas, después los segundos más grandes para las cien decenas y por último los más pequeños para las unidades. Así quedan equilibrados (NdT)
[5] ~~Tenemos 6 cifras~~ (NdT)
[6] Vas haciendo combinaciones entre los números y coges el más grande la suma más grande (NdT)
[7] Porque si sumas los números más grandes con los números segundos ~~números~~ más grandes da un resultado de una cifra alta (NdT)
[8] Porque los números de la ~~decena~~ centena son los más grandes (NdT)

## Referencias


Burgués, C., & Sarramona, J. (Eds.). (2013). *Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic: A favor de l'èxit escolar. Identificació i desplegament a l'educació secundària obligatòria*. Direcció General ESO i Batxillerat. Departament d'Ensenyament. Generalitat de Catalunya. Consultado en: http://ensenyament.gencat.cat/web/.content/home/departament/publicacions/colleccions/competencies-basiques/eso/eso-matematic.pdf [marzo 2016]

De Corte, E., Verschaffel, L., & Greer, B. (2000a). Connecting mathematics problem solving to the real world. In A. Rogerson (Ed.), *Proceedings of the International Conference on Mathematics Education into the 21st Century: Mathematics for living* (pp. 66-73). Amman, Jordan: The Hong Kong Institute of Education.

De Corte, E., Verschaffel, L., & Op't Eynde, P. (2000b). Self-regulation: A characteristic and a goal of mathematics learning. In M. Boekaerts, P. Pintrich & M. Zeidner (Eds.), *Handbook of self-regulation* (pp. 687–726). San Diego: Academic Press.

De Corte, E., & Verschaffel, L. (2003). El desarrollo de habilidades de autorregulación en la solución de problemas matemáticos. *Pensamiento Educativo, 32*, 286–305.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically*. Wokingham: Addison-Wesley.

Niss, M. A., & Højgaard, T. (Eds.) (2011). *Competencies and Mathematical Learning: Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark*. Roskilde: Roskilde Universitet. (IMFUFAtekst: i, om og med matematik og fysik; No. 485).

Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press.

Sanmartí, N. (2002). *Didáctica de las ciencias en la educación secundaria obligatoria*. Barcelona, España: Síntesis Educación.

Sanmartí, N. (2007). *Evaluar para aprender: 10 ideas clave*. Barcelona, España: GRAÓ.

Schoenfeld, A. H., (1983). The wild, wild, wild, wild, wild world of problem solving (A review of sorts). *For the Learning of Mathematics, 3(3)*, 40–47.

Schoenfeld, A. H. (2007). What is mathematical proficiency and how can it be assessed? *Assessing Mathematical Proficiency. MSRI Publications, 53*, 59–73.

Schoenfeld, A. H. (2013). Reflections on problem solving theory and practice. *The Mathematics Enthusiast (TME), 10(1y2)*, 9–34.

Villalonga, J., & Deulofeu, J. (2015). La base de orientación en la resolución de problemas. En FESPM, SEMRM (Eds.) *Actas JAEM 2015. 17 Jornadas para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas* (pp.36, n.68). Cartagena, España: Pedro Ángel Sánchez Martínez, S.L.U.

**Villalonga** es estudiante de dotorado en el Departamento de Didáctica de las Matemáticas y de las ciencias Experimentales, Universitat Autònoma de Barcelona, España.

**Jordi Deulofeu** es profesor titular en el Departamento de Didáctica de las Matemáticas y de las ciencias Experimentales, de la Universitat Autònoma de Barcelona, España.

**Dirección de Contacto:** La correspondencia directa sobre este artículo se debe enviar al autor. Dirección Postal: Edifici G5, Campus de la UAB, 08193 Bellaterra (Cerdanyola del Vallés). Spain. **Email**: Jordi.deulofeu@uab.cat

REDIMAT
Journal of Research in Mathematics Education

Hipatia Press
www.hipatiapress.com

Instructions for authors, subscriptions and further details:

http://redimat.hipatiapress.com

# Razón de Ser del Cálculo Diferencial Elemental en la Transición Entre la Enseñanza Secundaria y la Universitaria

Catarina O. Lucas[1], Josep Gascón Pérez[2], Cecilio Fonseca Bon[3]

1) Instituto Politécnico do Porto
2) Universitat Autònoma de Barcelona
3) Universidad de Vigo

Date of publication: October 24th, 2017
Edition period: October 2017-February 2018

**To cite this article:** Lucas, C.O., Gascón, J. & Fonseca, C. (2017). Razón de ser del cálculo diferencial elemental en la transición entre la enseñanza secundaria y la universitaria. *REDIMAT*, *6*(3), 283-306. doi: http://dx.doi.org/10.17583/redimat.2017.2116

**To link this article:** http://dx.doi.org/10.17583/redimat.2017.2116

*REDIMAT, Vol. 6 No. 3 October 2017 pp. 283-306*

# Raison d'être of the Elementary Differential Calculus in the Transition Between Secondary school and University

Catarina O. Lucas
*Instituto Politécnico do Porto*

Josep Gascón
*Universitat Autònoma de Barcelona*

Cecilio Fonseca
*Universidad de Vigo*

(*Received: 31 May 2016; Accepted: 26 September 2017; Published: 24 October 2017)*

**Abstract**

This paper presents a study of the didactic phenomenon of lack of visibility and irrelevance of *functional modelling* (FM) in the transition between secondary and university, by relating it with the «official» *raison d'être* (rationale) that the curriculum documents currently assigns to the *elementary differential calculus* (EDC). Based on the analysis of the didactic transposition of the EDC, we propose general criteria which should satisfy a *reference epistemological model* that redefines the FM and assigns to the EDC an alternative *raison d'être* to the official that will be more compliant with the role that it plays in the scientific activity. In this paper we present the answers provided by the Portuguese educational system, but we have collected answers and similar data from educational systems of other countries (France, Spain and Brazil).

**Keywords:** Functional modelling, elementary differential calculus, reference epistemological model, *raison d'être*

2017 Hipatia Press
ISSN: 2014-3621
DOI: 10.17583/redimat.2017.2116

*REDIMAT, Vol. 6 No. 3 Octubre 2017 pp. 283-306*

# Razón de Ser del Cálculo Diferencial Elemental en la Transición Entre la Enseñanza Secundaria y la Universitaria

Catarina O. Lucas
*Instituto Politécnico do Porto*

Josep Gascón
*Universitat Autònoma de Barcelona*

Cecilio Fonseca
*Universidad de Vigo*

(*Recibido: 31 Mayo 2016; Aceptado: 26 Septiembre 2017; Publicado: 24 Octubre 2017)*

**Resumen**

En este trabajo se estudia el fenómeno didáctico de la falta de visibilidad e irrelevancia de la *modelización funcional* (MF) en la transición entre la enseñanza secundaria y la universitaria, relacionándolo con la razón de ser «oficial» que los documentos curriculares asignan actualmente al *cálculo diferencial elemental* (CDE). En base al análisis de la transposición didáctica del CDE, proponemos los criterios generales que deberá cumplir un *modelo epistemológico de referencia* que redefina la MF y asigne al CDE una razón de ser alternativa a la oficial que sea más acorde con el papel que este desempeña en la actividad científica. En este trabajo presentamos las respuestas que proporciona el sistema educativo portugués, pero tenemos recogidas respuestas y datos semejantes de sistemas educativos de otros países (Francia, España y Brasil).

**Palabras clave:** Modelización funcional, cálculo diferencial elemental, modelo epistemológico de referencia, razón de ser

2013 Hipatia Press
ISSN: 2014-3621
DOI: 10.4471/redimat.2017.2116

En las investigaciones llevadas a cabo en el ámbito de la *teoría antropológica de lo didáctico* (TAD) en el que se sitúa este trabajo, se distingue entre la razón de ser «oficial» que la institución escolar asigna a un ámbito de la matemática escolar, esto es, las funciones que le asigna en la práctica, de otras posibles razones de ser alternativas. Esta distinción se debe a que, en base a una investigación didáctica en la que esté involucrado dicho ámbito, es posible que se sienta la necesidad de postular una razón de ser distinta de la que le asigna el currículo oficial, lo que comportará una modificación profunda de las cuestiones y de las tareas que habitualmente se suponía que daban sentido al estudio de dicho ámbito en determinado nivel educativo.

La nueva razón de ser provocará, inevitablemente, una reformulación y hasta una nueva definición, de la estructura de dicho ámbito y de su relación con el resto de las organizaciones matemáticas escolares hasta el punto que, muchas de las citadas investigaciones pueden interpretarse (aunque no sea ésta la única interpretación posible) como la asignación a cierto ámbito de la matemática escolar, por parte de un *modelo epistemológico de referencia* (en adelante, MER), alternativo al modelo epistemológico dominante en la institución en cuestión, de una razón de ser distinta de la que se le asigna oficialmente. Así, por ejemplo, podemos citar los siguientes ámbitos a los que se les ha asignado, en diferentes trabajos, una razón de ser alternativa:

a) Bolea (2002) y Ruiz-Munzón (2010), para superar las limitaciones del álgebra como *aritmética generalizada*, situaron la razón de ser del *álgebra elemental* en el ámbito de la *modelización algebraica*.
b) García (2005) superó el aislamiento de la *proporcionalidad* situando su razón de ser en el ámbito del conjunto de *relaciones funcionales* elementales.
c) Sierra (2006), para articular la designación de los naturales con la economía y fiabilidad de los algoritmos, situó la razón de ser de los *sistemas de numeración* en el ámbito del *cálculo aritmético*.
d) Cid (2016) para superar las contradicciones originadas por los modelos realistas (también denominados modelos concretos) de los *números negativos*, situó la razón de ser de los mismos en el ámbito del *álgebra elemental*.

e) Licera et al. (2011) para superar el fenómeno de la ocultación escolar de la problemática en torno al uso de los *números reales* situaron la razón de ser de estos en el ámbito de las *magnitudes continuas*.

En cada caso el MER construido por los investigadores constituye una conjetura o hipótesis científica que desempeña el papel de *instrumento de emancipación epistemológica* del didacta y de la ciencia didáctica respecto de los códigos imperantes en la escuela (Gascón 2014). En particular, se puede tomar como sistema de referencia para caracterizar la razón de ser oficial de un cierto ámbito de la matemática escolar.

En este trabajo, utilizando la metodología de investigación de la TAD, que ha sido experimentada en los casos citados anteriormente, describimos el modelo epistemológico dominante y caracterizamos la razón de ser «oficial» del cálculo diferencial en la citada institución. Paralelamente, en base a la conjetura de Ruiz-Munzón y al análisis de la *transposición didáctica* (Chevallard 1985) del CDE, proponemos los criterios generales que deberá cumplir un MER que *redefina* la MF y asigne al CDE una razón de ser alternativa a la oficial que sea más acorde con el papel que este desempeña en la actividad científica. Como culminación de este proceso, constatamos y empezamos a estudiar el fenómeno didáctico de la *falta de visibilidad escolar* de la modelización funcional y la correspondiente ausencia de una posible razón de ser del cálculo diferencial elemental en este ámbito, al tiempo que proponemos una alternativa para superar las limitaciones de la organización matemática institucionalizada. Estos son, en síntesis, los objetivos fundamentales de este trabajo.

## Tipos de Tareas que Propone el Sistema de Enseñanza Portugués para Dar Sentido al Estudio del Cálculo Diferencial en el Paso de Secundaria a la Universidad

En esta sección describiremos con cierta precisión las funciones que el cálculo diferencial elemental (en adelante CDE) *desempeña efectivamente* en el último curso de la enseñanza secundaria portuguesa (alumnos entre 16-18 años) y el primer curso de algunos grados universitarios (alumnos entre 18-19 años).

En este trabajo, denominaremos CDE al conjunto de temas que se incluyen bajo dicho epígrafe en la última etapa de la enseñanza secundaria portuguesa y en los primeros cursos universitarios de algunas licenciaturas o grados como, por ejemplo, los de Bioquímica, Medicina Nuclear, Economía, Biología, Geología, Ingenierías, Ciencias Farmacéuticas, etc. (cf. Lucas, 2015, p. 84-85).

Aunque en este trabajo nos centraremos en el caso del sistema educativo portugués, los resultados y las conclusiones a los que llegaremos son aplicables en gran medida a otros sistemas educativos, tales como, por ejemplo, a los sistemas educativos español, francés y brasileño, entre otros. Algunos de los datos que nos permiten ampliar dichas conclusiones pueden ser consultados en Lucas (2015) y en Gascón, Lucas, Nicolás y Sierra (2016).

La metodología que vamos a utilizar para describir las funciones que el Cálculo desempeña en el último curso de Secundaria y el primer curso universitario consistirá en un trabajo de identificación y descripción sistemática (y tan exhaustiva como sea posible) de los tipos de tareas y de las cuestiones que el sistema escolar considera que requieren del uso de las nociones y las técnicas del Cálculo. La cuestión que pretendemos responder puede plantearse inicialmente mediante un enunciado general:

> **$Q_1$:** ¿En qué tareas escolares se utilizan los principales componentes (nociones, técnicas y discursos tecnológico-teóricos asociados) del Cálculo? ¿Qué cuestiones requieren para ser respondidas, según la organización matemática escolar, el uso de dichos componentes? Esto es, ¿qué tareas se proponen en la práctica matemática escolar para dar sentido a (o justificar el estudio de) las citadas nociones, técnicas y discursos tecnológico-teóricos?

Para precisar el alcance de la cuestión $\mathbf{Q_1}$ formularemos un conjunto de cuestiones derivadas $\mathbf{Q_{1i}}$ mucho más concretas. Para responder a estas cuestiones utilizaremos como base empírica los siguientes materiales:

*De la enseñanza secundaria portuguesa:*

- manuales escolares de Matemática A de la enseñanza secundaria (11.º y 12.º año de escolaridad);
- exámenes nacionales de Matemática A (del final de secundaria de cursos de *Ciências e Tecnologias* y de *Ciências Sócio-Económicas*).

*Del primer curso de la enseñanza universitaria portuguesa:*

- apuntes teóricos y ejercicios en fichas de trabajo de los profesores de cálculo diferencial e integral del primer curso universitario de los grados indicados anteriormente;
- exámenes.

Se reseña que, al contrario del sistema educativo español, el sistema educativo portugués es centralizado, o sea, se estudia esencialmente lo mismo en todas las escuelas y universidades del país. Así, en esta sección, las cuestiones que planteamos al sistema educativo portugués se proponen utilizando las nociones que proporciona el modelo epistemológico en torno al Cálculo *dominante en la institución*. Posteriormente introduciremos un modelo epistemológico alternativo al oficial lo que nos permitirá, al disponer de un punto de vista externo y explícito, profundizar en la caracterización de la razón de ser que se asigna oficialmente al Cálculo en dicha institución.

**Q$_{11}$:** ¿En qué tipos de tareas escolares se utiliza la noción de *límite de una función* (en un punto o en el infinito)? ¿Qué cuestiones escolares requieren para ser respondidas del cálculo de límites funcionales? En particular, ¿se utilizan los límites funcionales para fundamentar el *estudio de la continuidad de una función*?

- **R$_{11}$:**[1] Habitualmente se calculan límites de funciones en un punto o en el infinito sin ningún otro objetivo. En algunos casos, se utilizan para determinar las asíntotas de la función o para estudiar la continuidad de la misma. En este último caso es habitual caer en un razonamiento circular, puesto que algunos manuales y los documentos curriculares analizados recomiendan, para calcular el límite de una función en un punto de abscisa $x_0$, substituir $x$ por $x_0$ y si este procedimiento conduce a una indeterminación, entonces se propone que se utilicen únicamente técnicas algebraicas para deshacerla. También se utilizan límites para calcular la derivada en un punto (haciendo uso de la definición) pero sólo en casos muy sencillos, lo que provoca una predominancia escolar de las técnicas de derivación algebraicas sobre la técnica del límite del cociente incremental.

En la matemática escolar es muy habitual la tarea que consiste en «verificar si una función definida a trozos es continua o diferenciable», como, por ejemplo, la tarea siguiente:

**5.** (3,5 val.) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua em $\mathbb{R}$ e definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x \arctan \sqrt{x}\,, & \text{se } x > 0 \\ \log(x^2 + x + 1)\,, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

(a) Justifique que $f(0) = 0$ e verifique se $f$ é ou não diferenciável no ponto zero.

*Resolução.* (0.5 val.) Uma vez que $f$ é contínua em 0, temos $f(0) = f(0^+) = f(0^-)$. Logo, por ex., $f(0) = \lim_{x \to 0^+} x \arctan \sqrt{x} = 0$.
Para vermos se é diferenciável em 0, calculamos

$$f'_d(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x \arctan \sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \arctan \sqrt{x} = 0,$$

$$f'_e(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\log(x^2 + x + 1)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{2x+1}{x^2+x+1}}{1} = 1$$

(onde se usou a Regra de Cauchy para levantar a indeteminação $\frac{0}{0}$). Como $f'_d(0) \neq f'_e(0)$, $f$ não é diferenciável em 0. □

*Figura 1.* Tarea de un examen para justificar que una función no es diferenciable

**Q$_{12}$:** El estudio y la *representación gráfica de funciones*, ¿qué tipo de cuestiones viene a responder en la matemática escolar?

- **R$_{12}$:** En la matemática escolar se utilizan las *representaciones gráficas de funciones* elementales para observar algunas de sus características o propiedades, tales como: el dominio y el recorrido, los ceros, el signo, la monotonía y los extremos. La gráfica de una función y la de la función derivada no se suelen considerar como modelos gráficos de un sistema. Por tanto, no se suele utilizar la gráfica de la función modelo para extraer información del sistema.

**Q$_{13}$:** ¿En qué tareas escolares aparece la necesidad de calcular la *derivada de una función en un punto*?

- **R$_{13}$:** Se calcula la derivada de una función en un punto para determinar la pendiente de la recta tangente al gráfico de la función en dicho punto y, en algunas ocasiones, para calcular la tasa de variación de un modelo funcional dado. La tarea de calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto se considera como un objetivo en sí mismo.

**$Q_{14}$:** ¿Qué cuestiones permite responder la *función derivada* de una función? ¿Y las *funciones derivadas de orden superior*?

- **$R_{14}$:** La *función derivada* de una función se utiliza para determinar los intervalos de monotonía y los extremos de la función dada, en particular, en la resolución de problemas de optimización o en la construcción o identificación de un posible esbozo del gráfico de una función dada.

La *función derivada segunda* se emplea en el estudio de la concavidad/convexidad de una función y en la determinación de los puntos de inflexión. En algunos casos se utiliza la función derivada segunda para calcular la aceleración de un cuerpo. Las funciones derivadas de orden superior a 2 se utilizan en los inicios de la enseñanza universitaria portuguesa para escribir el Polinomio de Taylor, lo cual no se interpreta como un modelo funcional aproximado de cierto sistema.

**$Q_{15}$:** ¿Cuál es la razón de ser oficial de la noción de *primitiva de una función* y del *cálculo de primitivas*?

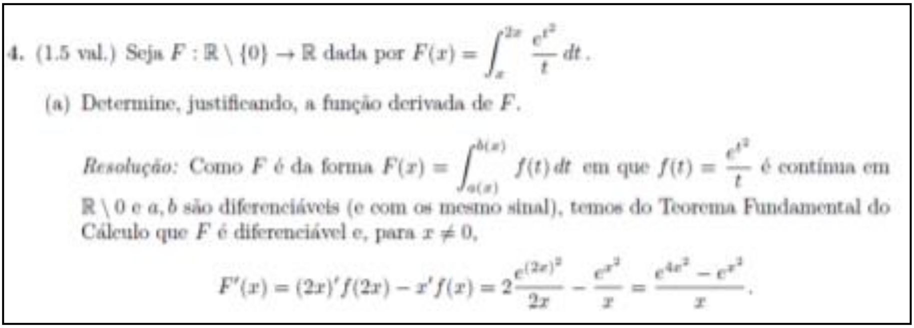
- **$R_{15}$:** En el sistema educativo portugués el cálculo de primitivas se desarrolla especialmente en el primer curso universitario sin atribuirle una verdadera funcionalidad, o sea, la determinación de la primitiva de una función es un objetivo en sí mismo (se utilizan las primitivas solo para calcularlas y nada más). En el último curso de Secundaria aparece únicamente la noción de *antiderivada* en algunos manuales.

**$Q_{16}$:** ¿Para qué se utiliza en la matemática escolar el cálculo de *integrales definidas* en un intervalo?

- **$R_{16}$:** En la Universidad se utilizan las integrales definidas habitualmente para calcular áreas bajo una curva y entre curvas. También en tareas dirigidas a calcular volúmenes de sólidos de revolución y longitudes de curvas planas.

**$Q_{17}$:** ¿En qué tipo de tareas se utiliza escolarmente el *Teorema Fundamental del Cálculo*?

- **$R_{17}$:** Aparece por primera vez en la enseñanza universitaria y se utiliza para definir la noción de integral como la inversa de la derivada. Se usa para mostrar que una función es diferenciable, o incluso para justificar el cálculo de la función derivada de una función dada mediante una integral definida con extremos variables como, por ejemplo, en la siguiente tarea:



4. (1.5 val.) Seja $F : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{t^2}}{t}\, dt$.

(a) Determine, justificando, a função derivada de $F$.

*Resolução:* Como $F$ é da forma $F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\, dt$ em que $f(t) = \frac{e^{t^2}}{t}$ é contínua em $\mathbb{R} \setminus 0$ e $a, b$ são diferenciáveis (e com os mesmo sinal), temos do Teorema Fundamental do Cálculo que $F$ é diferenciável e, para $x \neq 0$,

$$F'(x) = (2x)'f(2x) - x'f(x) = 2\frac{e^{(2x)^2}}{2x} - \frac{e^{x^2}}{x} = \frac{e^{4x^2} - e^{x^2}}{x}.$$

*Figura 2.* Tarea de un examen en que se utiliza el Teorema Fundamental del Cálculo para determinar la Función Derivada de una Función.

**$Q_{18}$:** ¿Para responder a qué tipo de cuestiones se necesita resolver *ecuaciones diferenciales* (inmediatas)?

**$R_{18}$:** En los inicios de la enseñanza universitaria portuguesa aparecen muchos ejercicios en los que la resolución de una ecuación diferencial se plantea como un objetivo en sí mismo y, muy excepcionalmente, aparecen tareas cuya realización requiere resolver ecuaciones diferenciales (inmediatas) para calcular una función, conocidas sus derivadas primera y segunda y el valor de la función en un punto.

## Conjetura de Ruiz-Munzón: Una Posible Razón de Ser del Cálculo Diferencial Elemental como Alternativa a la Razón de Ser Oficial

El análisis de la razón de ser oficial del Cálculo en la transición entre la Secundaria y la Universidad, tal como se describe en la sección anterior, muestra ciertas *incoherencias.* Por ejemplo, se usa el límite para estudiar la continuidad de una función en un punto y, sin embargo, se supone que la función es continua como técnica para calcular dicho límite. Además, las respuestas que proporcionan los documentos curriculares a las cuestiones **$Q_{1i}$** revelan una fuerte *atomización y rigidez de las funciones* que se asignan escolarmente al CDE en el sistema portugués.

En un ámbito más general, diversas investigaciones analizan la contraposición entre la *rigidez* de la actividad matemática escolar y su necesaria *flexibilidad* para que los alumnos puedan llevar a cabo una actividad matemática «genuina» (Dreyfus 1991; Sfard 1989; Tall 1996; Ponte y Matos 1996). Esta rigidez y atomización de la organización matemática escolar se pone especialmente de manifiesto cuando la comparamos con la actividad científica. En efecto, el cálculo diferencial ha desempeñado históricamente (y sigue desempeñando) un papel muy relevante en la actividad científica, especialmente, en la construcción, utilización y comparación de *modelos funcionales*. En Lucas (2015), para estudiar el fenómeno específico de la *desarticulación escolar* entre el CDE y la *modelización funcional* (MF), hemos indagado la evolución histórica del papel del Cálculo en la enseñanza secundaria portuguesa, el origen *transpositivo* de dicho fenómeno, las condiciones que lo mantienen y sus principales consecuencias didácticas.

Para indagar los resultados obtenidos por las diferentes investigaciones didácticas, hemos llevado a cabo un estudio panorámico del tratamiento que ha recibido el problema didáctico del cálculo diferencial en Educación Matemática (Kaput 1992; Dubinsky y Harel 1992; Asiala et al. 1997; Cantoral y Montiel 2003; entre otros).

En particular, Michèle Artigue, en 1998, al estudiar la evolución de los programas del Cálculo en los currículos franceses, constató que, en el currículo de 1982:

> La actividad matemática se organiza en torno a la resolución de problemas: problemas de optimización, aproximación de números y funciones, modelos de variaciones discretas y continuas... La noción de derivada, sobre todo la de función derivada, instrumento esencial para la resolución de tales problemas, se vuelve la noción central.
>
> El orden lógico ‘límites-continuidad-derivadas’ se rompe: Se ha introducido un lenguaje mínimo intuitivo de los límites para fundamentar la introducción de la derivación, luego la noción de función derivada se vuelve la pieza maestra del edificio; la noción de continuidad casi desaparece, ya que, con la definición elegida para la noción de límite, cualquier función que tiene un límite en un punto de su dominio de definición es necesariamente continua en este punto. (Artigue, 1998a, p. 48).

En el mismo año, Artigue relata que, en los años 80, en la Universidad de París, fue detectado un problema didáctico relativo al conflicto entre las matemáticas y la física alrededor del cálculo diferencial. Un estudio del proceso de transposición didáctica de las matemáticas y de la física tuvo la ambición de conducir a la elaboración de productos eficaces de ingeniería didáctica considerando *modelizaciones diferenciales e integrales*. Este estudio mostró que en matemáticas predomina la *función de aproximación local* (cálculo de errores, determinación de las tangentes, plano tangente,...), mientras que en física impera la *función de aproximación lineal local* (con el paso de local a global) para buscar una ley de variación o para definir y calcular ciertas cantidades de magnitud (por ejemplo, el concepto de trabajo de una fuerza variable en una trayectoria no rectilínea, a partir de la noción de trabajo de una fuerza constante en un camino recto). Muchos de los comportamientos observados entre los estudiantes y los profesores se hacen comprensibles si se tiene en cuenta el hecho de que estas dos funciones no están, en el proceso de transposición didáctica habitual, claramente identificadas ni distinguidas. Asociada a esta brecha didáctica está la diferente forma de representar la derivada en las matemáticas y la física (Artigue, 1998b).

En Lucas (2015) también analizamos las relaciones que las diversas investigaciones didácticas propugnan entre el CDE y la MF, en el paso de Secundaria a la Universidad (Schneider 1991; Winsløw 2007; Galbraith 2011; Bravo y Cantoral 2012; Trigueros 2009; entre otros). En este estudio se concluyó que muchas de las investigaciones didácticas analizadas tienden a asumir la *razón de ser oficial* del CDE y, en consecuencia, no se reformula la actividad de MF mediante una estructura articulada de tareas matemáticas coordinadas entre sí, lo que origina que el papel del cálculo diferencial quede *fragmentado* en aplicaciones puntuales.

En este mismo sentido, y en relación con el problema didáctico del cálculo diferencial elemental, Noemí Ruiz-Munzón conjeturó que la razón de ser del CDE podría situarse en el ámbito de la *modelización funcional*, esto es, en el ámbito de la actividad de modelización matemática en la que los modelos se expresan mediante funciones:

> […] la modelización funcional, tal como se caracteriza en este trabajo, debería constituir la razón de ser del cálculo diferencial del Bachillerato y de los primeros cursos universitarios. Pero hemos de reconocer que se necesita un estudio más detallado para contrastar

> empíricamente dicho postulado lo que requerirá, en particular, desarrollar el MER propuesto para la modelización algebraico-funcional de tal manera que integre la actividad matemática elemental en torno al cálculo diferencial e integral. (Ruiz-Munzón 2010, p. 379, vol. 1).

En coherencia con esta conjetura y en base a los análisis citados, enunciaremos los *rasgos fundamentales* o *criterios generales* que deberá cumplir un *modelo epistemológico de referencia* (MER) que redefina la modelización funcional y permita asignar al CDE una razón de ser alternativa más acorde con el papel que desempeña en la actividad científica. Delinearemos únicamente las principales características de este modelo cuya construcción detallada puede consultarse en Lucas (2015).

En este trabajo utilizaremos dichos criterios generales que debe cumplir el MER a modo de *sistema de referencia* provisional para formular cuestiones a los documentos curriculares escolares cuyas respuestas nos permitirán, en primer lugar, caracterizar el *modelo epistemológico dominante* en torno a la MF. Y, una vez situados en el ámbito de la modelización funcional así redefinida por el modelo epistemológico de referencia, podremos plantear cuestiones para indagar las relaciones entre la MF y el CDE. Las respuestas a estas nuevas cuestiones nos permitirán profundizar en la caracterización de la razón de ser «oficial» que se asigna actualmente al CDE y en el análisis de la desarticulación escolar entre él y la MF.

Enunciamos a continuación los criterios que proponemos para caracterizar la modelización funcional y que también pueden considerarse como condiciones que imponemos al modelo alternativo que tomaremos como sistema de referencia.

- En el MER que proponemos se deben explicitar detalladamente diferentes procesos de construcción, utilización y comparación de los modelos funcionales, la relación entre ellos y el papel que juega el Cálculo en los mismos.
- Dicho modelo deberá tomar en consideración las relaciones entre los modelos funcionales discretos y los continuos y, por tanto, completar relativamente el presentado en Ruiz-Munzón (2010).
- En algunos casos, y como paso previo a la construcción de los modelos funcionales continuos, se partirá de datos discretos y, por

tanto, se trabajará inicialmente con modelos discretos expresados en términos de sucesiones y de ecuaciones en diferencias finitas.

- Si se parte de datos discretos, se utilizarán diferentes tipos de regresión para pasar de los modelos discretos a los modelos continuos ya sea partiendo, en función de la naturaleza del sistema a modelizar, de los datos brutos, de la tasa de variación media (TVM) o la tasa de variación media relativa (TVMR), para construir modelos funcionales que ajusten un conjunto de datos discretos.
- Se justificará y evaluará el proceso de aproximación de los modelos discretos, (formulados en términos de ecuaciones en diferencias finitas), mediante modelos continuos (dados mediante ecuaciones diferenciales).
- Se mostrará que, dependiendo de la naturaleza del sistema a modelizar, la aproximación por regresión sobre la TVM o la TVMR (sucesiones que se obtienen a partir de los datos brutos) proporciona modelos funcionales relativamente más ajustados y, sobre todo, con mejor capacidad predictiva que los que se obtienen aproximando directamente los datos discretos brutos.
- Se pondrá de manifiesto la economía técnica que supone el paso de lo discreto a lo continuo mostrando, mediante cálculos explícitos, en qué sentido y para responder a qué tipo de cuestiones las técnicas del Cálculo son más económicas que las técnicas algebraicas de la matemática discreta.
- Se construirán y articularán diferentes tipos de variación tanto entre magnitudes discretas como entre magnitudes continuas[4]. Cada uno de estos tipos se caracterizará imponiendo condiciones (hipótesis) sobre la TVM o sobre la TVMR. Se delimitará de esta forma un cierto universo de tipos elementales de variación.
- Se interpretará, utilizando las técnicas del Cálculo, el significado de los parámetros de un modelo funcional en términos del sistema.
- Se utilizará el CDE para estudiar las propiedades locales de los modelos funcionales construidos (que posteriormente se interpretarán en términos del sistema modelizado).
- Si se parte de datos continuos, se construirá con técnicas algebraicas la propia función modelo o bien su derivada. En este

último caso, el modelo funcional se construye integrando una ecuación diferencial.

- En todos los casos, los procesos de modelización funcional se desarrollarán con el objetivo de dar respuesta a una cuestión generatriz suficientemente general y relativamente ambigua en el sentido que debe ser una cuestión formulada con «parámetros» abiertos que sólo progresivamente deben convertirse en datos concretos.
- Los procesos de modelización funcional (MF) que forman parte del MER deben estar encaminados a estudiar la variación de cierta magnitud (longitud, área, volumen, trabajo, energía, etc.) respecto de otra u otras.

Este conjunto de condiciones permite precisar la noción de *modelización funcional* tal como la conceptualizamos en este trabajo. Esta caracterización permitirá clarificar el significado de la conjetura de Ruiz-Munzón (2010) según la cual la razón de ser (o una posible razón de ser) del CDE se sitúa en el ámbito de la MF.

Para terminar, digamos que estructuramos la MF mediante los *cuatro estadios* de cualquier proceso de *modelización matemática* (Chevallard 1989; Gascón 2001), sin prejuzgar una sucesión temporal lineal entre ellos:

- *Primer estadio*: Delimitación o construcción del sistema (matemático o extramatemático) a modelizar en el que se formulan cuestiones problemáticas y conjeturas.
- *Segundo estadio:* Construcción del modelo matemático del sistema y reformulación de las cuestiones iniciales.
- *Tercer estadio:* Trabajo técnico dentro del modelo e interpretación de este trabajo y de los resultados en términos del sistema.
- *Cuarto estadio:* Necesidad de un nuevo proceso de modelización para responder a nuevas cuestiones.

## Caracterización de la Modelización Funcional Escolar y del Papel del Cálculo en Dicho Ámbito a la Luz del Modelo Epistemológico de Referencia

La metodología que utilizaremos en esta sección está basada completamente en el MER puesto que se trata de indagar cuáles de los componentes que constituyen la MF, tal como ha sido redefinida por el modelo de referencia, están presentes en la práctica matemática escolar y qué papel desempeña el Cálculo en dicho ámbito. Una forma de sistematizar esta indagación consiste en responder a un conjunto de cuestiones derivadas de la siguiente cuestión general:

**$Q_2$:** ¿Cómo vive la modelización funcional en el tránsito de la enseñanza secundaria a la enseñanza universitaria?, esto es, ¿cuál es el *modelo epistemológico dominante* en torno a la MF en dicha institución? ¿Qué tipo de actividades contiene y en qué estadios de la modelización matemática se sitúan dichas actividades? ¿Qué papel desempeña el CDE en cada uno de los estadios de la MF?

De nuevo, para precisar el alcance de la cuestión **$Q_2$** formularemos un conjunto de cuestiones derivadas **$Q_{2i}$** mucho más concretas. Para responder a estas cuestiones utilizaremos la misma base empírica citada en el caso de la cuestión **$Q_1$**. Plantearemos las cuestiones **$Q_{2i}$** al sistema educativo portugués.

**$Q_{21}$:** ¿Se asigna a los estudiantes la responsabilidad de *construir modelos funcionales*? En particular, ¿se propone la construcción de *modelos numéricos o gráficos* a partir de *datos discretos*?

- **$R_{21}$:** Casi todos los modelos funcionales que aparecen en la matemática escolar están dados de antemano. En algunas tareas se propone excepcionalmente la construcción de modelos *funcionales* a partir de datos *continuos* expresados en términos de relaciones entre variables. Está prácticamente ausente la construcción de modelos numéricos o gráficos a partir de datos discretos y nunca se formulan hipótesis sobre la variación (TVM o TVMR). Consecuentemente no se construyen modelos en términos de ecuaciones en diferencias finitas.

**$Q_{22}$:** ¿Se utiliza la *integral definida* para construir modelos funcionales? ¿Se construyen o, al menos, aparecen modelos en términos de *ecuaciones diferenciales* de integración elemental?

- **$R_{22}$:** En la matemática escolar no se utiliza la integral definida para construir modelos funcionales y sólo excepcionalmente aparece alguna ecuación diferencial desempeñando el papel de modelo de un sistema.

**$Q_{23}$:** ¿Los modelos funcionales que aparecen en la matemática escolar vienen dados por *familias de funciones*?

- **$R_{23}$:** En los documentos analizados aparecen muy pocas tareas que impliquen un trabajo dentro de modelos funcionales que vengan dados mediante una familia de funciones que depende de uno o más parámetros. En dichas tareas se fija rápidamente el valor de los parámetros reduciendo el modelo a una única función. Además, nunca se solicita al estudiante que conjeture sobre una posible construcción de tales modelos.

Admita que a intensidade da luz solar, $x$ metros abaixo da superfície da água, é dada, numa certa unidade de medida, por

$$I(x) = ae^{-bx} \quad (x \geq 0)$$

$a$ e $b$ são constantes positivas que dependem do instante e do local onde é efectuada a medição.
Sempre que se atribui um valor a $a$ e um valor a $b$ obtemos uma função de domínio $\mathbb{R}_0^+$
Considere agora $b = 0,05$ e $a = 10$
Estude essa função quanto à monotonia e existência de assíntotas do seu gráfico.
Interprete os resultados obtidos no contexto da situação descrita.

*Figura 3.* Tarea de apuntes de profesor en que solo se trabaja el modelo ya construido

**$Q_{24}$:** ¿En qué *estadios del proceso de modelización* (cf. final de la sección 3) se sitúan prioritariamente las actividades de MF que aparecen en los materiales escolares analizados?

- **$R_{24}$:** En la matemática escolar, las actividades de MF que se llevan a cabo se sitúan esencialmente en el *tercer estadio* del proceso, lo que significa que el modelo ya está dado de antemano y únicamente se solicita el trabajo técnico dentro del mismo y, en algunos casos, la interpretación de los resultados de dicho trabajo en términos del sistema.

**$Q_{25}$:** ¿Se plantean cuestiones problemáticas iniciales relativamente genéricas y abiertas como punto de partida de un proceso de modelización funcional a largo plazo? ¿Se lleva a cabo o se propone explícitamente, la delimitación o construcción de un sistema mediante la elección de ciertas variables y la formulación de ciertas hipótesis sobre el sistema? ¿Cuál es el *grado de autonomía* del que disfrutan los alumnos en estos procesos de estudio?

- **$R_{25}$:** En la matemática escolar no se plantean cuestiones problemáticas abiertas generadoras de procesos de MF ni se asigna a los estudiantes la responsabilidad de delimitar los sistemas a modelizar mediante la elección de variables y la formulación de hipótesis.

**$Q_{26}$:** En la organización matemática escolar del bloque de *cálculo diferencial e integral*, ¿qué papel se asigna a la MF?

- **$R_{26}$:** En los diferentes materiales curriculares analizados se observa que las actividades de modelización funcional se consideran como meras *aplicaciones* de ciertas nociones y técnicas matemáticas estudiadas previamente. Se trata de una forma de interpretar la relación entre las matemáticas y las otras disciplinas que hemos denominado *aplicacionismo* y es una consecuencia de la epistemología de las matemáticas dominante en ciertas instituciones universitarias. Para el aplicacionismo, las matemáticas no son constitutivas de los fenómenos científicos, solamente *se aplican a posteriori* para cuantificarlos (Barquero et al. 2014).

**$Q_{27}$:** ¿Se estudia la relación entre los *modelos discretos y los continuos* y, en particular, se utilizan diferentes tipos de regresión para pasar de los modelos discretos a los continuos?

- **$R_{27}$:** Se construyen muy pocos modelos a partir de *datos empíricos discretos*. Por lo tanto, no se utiliza el Cálculo como instrumento para transformar un modelo discreto en un modelo continuo ni, tampoco, se utilizan las técnicas de «discretizar» para pasar de trabajar con un modelo funcional continuo a trabajar con modelos numéricos discretos. En general, no se relacionan los modelos continuos con los discretos.

**$Q_{28}$:** ¿Se trabaja con *ecuaciones en diferencias finitas* mostrando que *una de las razones de ser de la noción de derivada* en este nivel educativo no es otra que su *economía técnica* (en comparación con las técnicas de resolución de ecuaciones en diferencias finitas) cuando se trabaja con modelos funcionales?

- **$R_{28}$:** Está prácticamente ausente la técnica de aproximar una *ecuación en diferencias finitas* por una *ecuación diferencial,* así como la técnica recíproca. Además, no se trabaja con diferencias finitas. En consecuencia, está completamente ausente la comparación en términos de *economía y fiabilidad* de las técnicas algebraicas de resolución de ecuaciones en diferencias finitas con las técnicas de resolución de ecuaciones diferenciales elementales.

**$Q_{29}$:** En la matemática escolar, ¿cómo se estudia la variación de una magnitud respecto de otra (u otras)? En particular, ¿cómo se estudia la variación del área de una región plana, de la longitud de un arco de curva o de un volumen de revolución?

- **$R_{29}$:** En el paso de Secundaria a la Universidad no se estudia propiamente la *variación de las magnitudes área, longitud y volumen.* Este estudio se podría hacer perfectamente con las técnicas y la tecnología del CDE de la que se dispone, lo que requeriría simplemente llevar a cabo un proceso de modelización funcional para obtener conocimientos sobre el sistema modelizado. En lugar de eso, el sistema escolar aunque *construye la función que podría hacer el papel de modelo*, reduce el problema a calcular el valor concreto que toma dicha función para determinados valores de la variable independiente.

En general, podemos decir que en el estudio escolar de la variación de magnitudes continuas se ocultan diversas tareas y técnicas matemáticas que constituyen componentes esenciales de la MF y del papel del CDE en el ámbito de la MF. Además, en los casos en que se construye (aunque sea implícitamente) un modelo funcional, se suelen proporcionar los datos para poder construir la función $F'(x)$ (y, en algunos casos, dicha derivada es un dato explícito del problema) evitando así la necesidad de aproximar una ecuación en diferencias finitas mediante una ecuación diferencial (puesto que ésta se puede construir directamente).

Así, por ejemplo, en la matemática escolar no se explicita en ningún momento que se está construyendo un modelo funcional dado por la función:

$$F(x) = \int_a^x \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt$$

Análogamente, algunos libros de texto, para modelizar la variación continua de la magnitud *longitud de arco de curva* utilizan la *variación infinitesimal*, $dF$ de dicha longitud entre dos abscisas «muy próximas» $x$ y $x + dx$.

$$(dF(x))^2 = (dx)^2 + (df(x))^2$$

de donde se deduce directamente el modelo matemático expresado en términos de una ecuación diferencial elemental:

$$\frac{dF(x)}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2}$$

En este ejemplo (y en muchos otros como es el caso de la variación del volumen de un sólido de revolución) la derivada $\frac{dF}{dx}$ de la función incógnita se puede construir con los datos del problema, pero no está dada directamente. A pesar de lo cual, tampoco en este caso se suele considerar que la incógnita sea la función $F$, ni se trabaja con esta función como modelo para responder a cuestiones que surgen en el sistema que modeliza (más allá de calcular un valor de la longitud de un segmento de curva concreto).

Estrictamente podría decirse que se utiliza el Cálculo para pasar de $\frac{dF}{dx}$ a calcular $F(x)$, en el bien entendido que $\frac{dF}{dx}$ o bien es un dato, o bien puede obtenerse a partir de los datos, aunque sea de una forma no justificable en la institución en cuestión.

En resumen, dado que en la práctica matemática escolar no se considera en ningún momento que se esté llevando a cabo un proceso de MF, no se considera que exista un sistema que se está modelizando para utilizar el modelo matemático como instrumento para responder a cuestiones problemáticas que surgen en dicho sistema. Tampoco se considera que la incógnita sea una función ni una familia de funciones, sólo interesa (escolarmente) determinar algunos de los valores concretos $F(c)$ de dicha función.

## A Modo de Conclusión: El Fenómeno Didáctico de la Falta de Visibilidad Escolar de la Modelización Funcional y la Correspondiente Ausencia de una Posible Razón de Ser del Cálculo Diferencial Elemental

Las tareas que el sistema de enseñanza portugués plantea como razón de ser oficial del CDE, según se desprende de las respuestas a las cuestiones derivadas de $\mathbf{Q_1}$ son tareas bastante aisladas entre sí y poco relacionadas explícitamente con la MF por lo que, en principio, no podrían considerarse como componentes manifiestos de los procesos de MF. Se trata de tareas que, en la práctica escolar, se llevan a cabo para responder a cuestiones que generalmente demandan una cantidad concreta de cierta magnitud o, en su defecto, un número concreto. En los pocos casos en que la incógnita es una función no se requiere trabajar con ella para obtener nuevos conocimientos. Así, por ejemplo, la tarea relativa a la determinación de la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto, se propone en la práctica matemática escolar para responder a una cuestión relacionada con la *variación instantánea* de una función en un punto determinado o con la *aproximación local* de ésta mediante una función lineal. Se trata, por tanto, de responder a una cuestión muy particular relacionada con un aspecto concreto de dicha función cuya respuesta requiere el uso de las técnicas del CDE. Pero si interpretamos la función de partida como un *sistema* en el que ha surgido la citada cuestión problemática, es posible plantear una pregunta más general relativa a la *variación de la función* y, en ese caso, la respuesta que se requiere es, a su vez, una función (la derivada de la función de partida) que podemos considerar como un *modelo funcional* de esta y que, en particular, permitirá responder a otras muchas cuestiones relativas a la variación de la función de partida.

Otro ejemplo lo constituyen las tareas relativas al cálculo de primitivas elementales. Aunque éstas podrían utilizarse para la *construcción* de modelos funcionales (como punto de partida de procesos de MF), ni el currículo portugués actual del último curso de Secundaria ni el del primer curso universitario proponen esta funcionalidad para dicho tipo de tareas.

En general, puede mostrarse que los tipos de tareas que constituyen efectivamente la razón de ser oficial del CDE se pueden reinterpretar como parte de procesos de MF aunque, en la práctica escolar, la relación de estas tareas con los procesos de MF es en unos casos totalmente inexistente y, en otros, sólo alcanza una pequeña parte de uno de los estadios de dichos procesos.

Por otra parte, las respuestas a las cuestiones derivadas de $\mathbf{Q_2}$ ponen claramente de manifiesto que la MF, tal como la hemos caracterizado en la sección 3, está prácticamente ausente en el paso de Secundaria a la Universidad. Esta ausencia se pone especialmente de manifiesto si consideramos que un *proceso de modelización funcional* constituye un *recorrido matemático indivisible* que parte de una cuestión problemática y culmina en una respuesta provisional a dicha cuestión. Desde este punto de vista, las tareas que podrían constituir componentes de procesos de MF y que, de una u otra forma, están presentes en la práctica matemática escolar, son muy escasas y, además, aparecen aisladas.

Además, los datos empíricos recogidos en los documentos analizados muestran que en los pocos casos en que se utiliza el Cálculo para estudiar algunos aspectos de un sistema mediante el trabajo en un modelo funcional que lo describa, el modelo suele estar dado de antemano o, en el mejor de los casos, es construible mediante técnicas algebraicas. Prácticamente en ningún caso la construcción del modelo parte de datos discretos obtenidos empíricamente y, en todos los casos, el papel del CDE es muy limitado a lo largo de todo el proceso de modelización, concentrándose esencialmente en el tercer estadio de dicho proceso. Las tareas relacionadas con la resolución de *problemas de optimización* son prácticamente las únicas en las que se lleva a cabo el estudio de un sistema a partir de un modelo funcional. En estas tareas, el papel del Cálculo no va mucho más allá del cálculo de los extremos y el estudio de la monotonía del modelo funcional.

Dejando aparte los problemas de optimización, algunas prácticas matemáticas escolares que se acercan a lo que podría ser un verdadero proceso de MF no aparecen como tales. Un ejemplo muy evidente de la existencia de estos *modelos funcionales ocultos* en la práctica matemática escolar está relacionado con el cálculo del área de regiones planas, de longitudes de arcos de curvas y de volúmenes de revolución tal como muestra la respuesta $\mathbf{R_{29}}$.

Este ejemplo pone claramente de manifiesto que, incluso en los casos en que el Cálculo se utiliza efectivamente como instrumento imprescindible para *construir un modelo funcional*, el sistema escolar no reconoce que se trate de un proceso de MF, ni que el resultado del mismo sea un modelo (funcional). En consecuencia, en la práctica matemática escolar no se explotan las posibilidades del modelo construido como instrumento de producción de conocimientos del sistema modelizado. Este hecho constituye otro indicio claro del *fenómeno de falta de visibilidad* escolar de la actividad de modelización funcional y de la correspondiente ausencia de la razón de ser del CDE que el MER que proponemos le asigna, en coherencia con el papel que desempeña el CDE en la actividad científica.

Postulamos, en resumen, que la forma como se trata en el paso de Secundaria a la Universidad el estudio de la variación de diversas magnitudes continuas *no deja ver que se está construyendo un modelo* *funcional* (utilizando el Cálculo como instrumento de construcción del mismo) puesto que lo que se toma como incógnita, explícitamente, esto es, el objeto matemático que se pretende construir, no es una función (o familia de funciones) sino una fórmula algoritmizada para calcular valores concretos del área de cierta región plana, la longitud de cierta porción de curva o el volumen de un determinado cuerpo de revolución.

En definitiva, podemos afirmar que la razón de ser que el MER asigna al CDE, en el ámbito de la MF, es una ampliación (o generalización) radical de la razón de ser oficial que le asigna el sistema educativo portugués actual. En consecuencia, el modelo de referencia que proponemos, al asignar al cálculo diferencial elemental una nueva *razón de ser* que explicita el papel que puede desempeñar a lo largo de todos los estadios de la modelización funcional, permite *sacar a la luz e interpretar un fenómeno didáctico-matemático* que actualmente permanece oculto y que está profundamente ligado a la irrelevancia escolar de la MF.

Sin pretender buscar las «causas» de este fenómeno, el trabajo que hemos desarrollado hasta aquí nos permite afirmar en efecto que la languidez de la vida escolar de los procesos de MF depende en gran medida, más allá del fenómeno de la rigidez, atomización e incompletitud de las organizaciones matemáticas escolares (Fonseca 2004, Lucas 2010), de la desarticulación escolar entre el CDE y la MF, fruto de una transposición didáctica que debemos seguir estudiando.

# Notas

[1] Indicaremos mediante el símbolo Rij la respuesta que aporta el sistema educativo portugués a la cuestión designada previamente mediante Qij.
[2] En la matemática escolar (en el tránsito de Secundaria a la Universidad) está prácticamente ausente la problemática ligada a la caracterización y construcción de un universo de tipos de variación. En particular, no se caracterizan los tipos de relaciones funcionales que se toman en consideración ni se indica el por qué se excluyen otros tipos de relaciones funcionales posibles.

## Referencias

Artigue, M. (1998a). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *1*(1), 40-55.

Artigue, M. (1998b). L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse. *Recherches en didactique des mathématiques*, *18*(2), 231-261.

Asiala, M.; Cottrill, J.; Dubinsky, E. & Schwingendorf, K. (1997). The development of Students' Graphical Understanding of the Derivative. *Journal of Mathematical Behavior*, *16* (4), 399-431. doi: S0732312397900158

Barquero, B., Bosch, M. & Gascón, J. (2014). Incidencia del «aplicacionismo» en la integración de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. *Enseñanza de las Ciencias*, *32* (1), 83-100. doi: 10.5565/rev/ensciencias.933

Bolea, P. (2002). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Zaragoza.

Bravo, S. & Cantoral, R. (2012). Los libros de texto de Cálculo y el fenómeno de la Transposición Didáctica. *Educación Matemática 24*(1), 5–36.

Cantoral, R. & Montiel, G. (2003). Una presentación visual del polinomio de Lagrange. *Números* 55, 3–22.

Chevallard, Y. (1985). *La Transposition Didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble, France: La Pensée Sauvage (2ª édiction 1991).

Chevallard, Y. (1989)*: Arithmétique, Algèbre, Modélisation. Étapes d'une recherche*. Publications nº 16 de l'IREM Aix-Marseille.

Cid, E. (2016). *Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Zaragoza.

Dreyfus, T. (1991). Advanced Mathematical Thinking Processes, En David Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 25-41). Dordrecht: Kluwer.

Dubinsky, E. & Harel, G. (Eds.) (1992). *The Concept of Function: Some Aspects of Epistemology and Pedagogy*. MAA Notes num. 25. Washington D.C.: Mathematical Association of America.

Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Secundaria y la Universidad*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Vigo.

Galbraith, P. (2011). Models of modelling: Is there a first among equals? In J. Clark, B. Kissane, J. Mousley, T. Spencer & S. Thornton (Eds.), Mathematics: Traditions and [new] practices. *Proceedings of the 34th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia and the Australian Association of Mathematics Teachers*, 279-287. Adelaide: AAMT and MERGA.

García, F. J. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Jaén.

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4* (2), 129-159.

Gascón, J. (2014). Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas. *Educación Matemática*, número especial, XXV aniversario, marzo de 2014, 143-167.

Gascón, J.; Lucas, C.; Nicolás, P; Sierra, T. (2016). Une possible « raison d'être » du calcul différentiel élémentaire dans le domaine de la modélisation fonctionnelle lors du passage de l'enseignement secondaire à l'enseignement supérieur. En Matheron, Y. et al. (Eds). *Enjeux et débats en didactique des mathématiques* (pp. 441-456). Grenoble, France : La Pensée Sauvage, Éditions.

Kaput, J. (1992). Technology and mathematics education. En Grouws, D. (Ed.) *Handbook on research in mathematics teaching and learning* (pp. 515-556). New York: Macmillan.

Licera, R.M., Bastán, M., Bosch, M. & Gascón, J. (2011). La construcción del número real y el problema de la medida de magnitudes continuas en la enseñanza secundaria. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage, M. Larguier (eds.), *Un panorama de la TAD. An overview of ATD* (pp. 695-718). Centre de Recerca Matemàtica.

Lucas, C. (2010). *Organizaciones Matemáticas Locales Relativamente Completas*. Tesina no publicada (Diploma de Estudios Avanzados: Programa Doctoral de Técnicas Matemáticas Avanzadas y sus

Aplicaciones). Departamento de Matemática Aplicada I, Universidad de Vigo, Vigo.

Lucas, C. (2015). *Una posible razón de ser del cálculo diferencial elemental en el ámbito de la modelización funcional.* Tesis doctoral no publicada. Universidad de Vigo.

Ponte, J. P. & Matos, J. F. (1996). Processos cognitivos e interacções sociais nas investigações matemáticas. In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds), *Investigar para aprender matemática* (pp. 119-137). Lisboa: APM e Projecto MPT.

Ruiz-Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional*. Tesis doctoral no publicada. Universitat Autònoma de Barcelona.

Schneider, M. (1991). Un obstacle épistémologique soulevé par des découpages infinis de surfaces et de solides. *Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 11*(2/3), 241-294.

Sfard, A. (1989). Transition from operational to structural conception: the notion of function revisited. *Proceedings of PME XIII*. (pp. 151-158). Paris.

Sierra, T. A. (2006). *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas. Los sistemas de numeración y la medida de magnitudes.* Tesis doctoral no publicada. Universidad Complutense de Madrid.

Tall, D. (1996). Functions and Calculus. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 289-325). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Trigueros, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación Educativa, 9* (46), 75-87.

Winsløw, C. (2007). Les problèmes de transition dans l'enseignement de l'analyse et la complémentarité des approches diverses de la didactique. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives, 12,* 189-204.

**Algunas Fuentes Consultadas**

*Enseñanza Secundaria*
http://bi.gave.min-edu.pt/exames/exames/eSecundario/761/?listProvas
http://mat.absolutamente.net/joomla/index.php/recursos/exames-e-testes-intermedios#matemática-a

*Enseñanza Universitaria*
http://paginas.fe.up.pt/am1/
http://ltodi.est.ips.pt/am1/
http://www.math.tecnico.ulisboa.pt/~mabreu/CI/
https://fenix.tecnico.ulisboa.pt/disciplinas/CDI30/2012-2013/1-semestre/testes-e-exames
http://w3.ualg.pt/~mgameiro/Celeste-112.htm
http://www.mat.uc.pt/~alma/aulas/analisematematica1/
http://www.mat.uc.pt/~alma/publicat/coursenotes/Biomatematica.pdf

**Caterina Oliveira Lucas** es profesora asistente convidada, en la Escola Superior de Educaçao, Instituto Politécnico do Porto, Portugal.

**Josep Gascón Pérez** es profesor agregado en el Departamento de Matemáticas, de la Universitat Autònoma de Barcelona, España.

**Cecilio Fonseca Bon** es profesor titular del Departamento de Matemática Aplicada, de la Universidad de Vigo, España.

**Contact Address:** La correspondencia directa sobre este artículo debe enviarse al autor. Dirección Postal: Edifici C, carrer dels Til·lers, 08193 Bellaterra (Cerdanyola del Vallés), Spain. **Email**: Josep.Gascon@uab.cat

REDIMAT
Journal of Research in Mathematics Education

Hipatia Press
www.hipatiapress.com

Instructions for authors, subscriptions and further details:

http://redimat.hipatiapress.com

# Mathematical Practice in Textbooks Analysis: Praxeological Reference Models, the Case of Proportion

Dyana Wijayanti[1,2] and Carl Winsløw[2]

1) Sultan Agung Islamic University
2) University of Copenhagen

Date of publication: October 24th, 2017
Edition period: October 2017-February 2018

**To cite this article:** Wijayanti, D., & Winsløw, C. (2017). Mathematical practice in textbooks analysis: Praxeological reference models, the case of proportion. *REDIMAT*, *6*(3), 307-330. doi: 10.1783/redimat.2017.2078

**To link this article:** http://dx.doi.org/10.17583/redimat.2017.2078

*REDIMAT, Vol. 6 No. 3 October 2017 pp. 307-330*

# Mathematical Practice in Textbooks Analysis: Praxeological Reference Models, the Case of Proportion

Dyana Wijayanti
*Sultan Agung Islamic University* and *University of Copenhagen*

Carl Winsløw
*University of Copenhagen*

(*Received: 05 May 2016; Accepted: 26 September 2017; Published: 24 October 2017)*

**Abstract**

We present a new method in textbook analysis, based on so-called praxeological reference models focused on specific content at task level. This method implies that the mathematical contents of a textbook (or textbook part) is analyzed in terms of the tasks and techniques which are exposed to or demanded from readers; this can then be interpreted and complemented by a discussion of the discursive and theoretical level of the text. The praxeological reference model is formed by the analyst to categorize various elements of the text, in particular the tasks and techniques which it explains or requires from readers. We demonstrate the methodological features of this approach by analyzing examples and exercises in three Indonesian textbooks, focusing on the chapters dealing with *arithmetic proportion* (defined theoretically by the model). We also illustrate how this rigorous analysis can be used to provide a quantitative "profile" of textbooks within a topic.

2017 Hipatia Press
ISSN: 2014-3621
DOI: 10.17583redimat.2017.2078

Hipatia Press
www.hipatiapress.com

*REDIMAT, Vol. 6 No. 3 Octubre 2017 pp. 307-330*

**Keywords:** Textbooks, praxeology, proportion

# Prácticas Matemáticas en el Análisis de los Libros de Texto: Modelos Praxeológicos de Referencia, el Caso de la Proporción

Dyana Wijayanti
*Sultan Agung Islamic University* and *University of Copenhagen*

Carl Winsløw
*University of Copenhagen*

(*Recibido: 05 Mayo 2016; Aceptado: 26 Septiembre 2017; Publicado: 24 Octubre 2017)*

**Resumen**

Presentamos un nuevo método de análisis de libros de texto, basado en los llamados modelos praxeológicos de referencia. Este método implica que el contenido matemático de un libro de texto (o parte del libro de texto) se analiza en términos de las funciones y técnicas que están expuestas o que se exigen al lector; esto puede interpretarse y complementarse con una discusión del nivel discursivo y teórico del texto. El modelo de referencia práctica sirve para categorizar varios elementos del texto. Mostramos los elementos metodológicos de este enfoque analizando ejemplos y ejercicios en tres libros de texto indonesios. Ilustramos cómo este análisis riguroso puede usarse para proporcionar un "perfil" cuantitativo de los libros de texto dentro de un tema.

**Palabras clave:** Libro de texto, praxeología, propocionalidad

2017 Hipatia Press
ISSN: 2014-3621
DOI: 10.17583redimat.2017.2078

The importance of "tasks" (exercises, problems and so on) as a main component of students' mathematical activity is increasingly acknowledged by researchers (e.g. Watson & Ohtani, 2015). Indeed, it is a commonly held assumption of both mathematics teachers and researchers that "the detail and content of tasks have a significant effect on learning" (ibid., p. 3). While a school mathematics textbook may at first present itself as a treatise exposing various contents, one of its main functions is in fact be to be a repository of tasks - whether presented together with solutions (often in the "main text"), or proposed as work for students (often in a separate section or volume of "exercises"). Many teachers draw on textbooks as a main source of examples and exercises (Fan, Zhu, & Miao, 2013, p. 643). In choosing a textbook, teachers (or whoever make that decision) will therefore have a significant interest in the contents and quality of the tasks exposed or proposed in the book.

What can teachers (or others) do to examine textbooks from this angle? One can try to assess if the tasks are compatible with any official regulations of mathematics teaching (e.g., the national curriculum). However, such guidelines are not always precise to the point of specifying types of tasks which students should encounter or work on, and so they offer little guideline for analysing examples and exercises in a detailed way. One may also use any relevant national exams to see if the book aligns with types of tasks found there; but in many contexts, such a "measure" will be highly reductive or wholly irrelevant.

In practice, teachers will often depend on others' assessments and opinions about a textbook, such as reviews in magazines or websites for mathematics teachers. Some countries (e.g. Indonesia and Japan) even have a national agency that produces reviews of textbooks and authorizes their use in public schools. But whether such assessments are endorsed by authority or not, one can ask the question: what are they based on? Against what common measure are books evaluated? Could this measure be based on explicit theoretical models, grounded in research? What kinds of theoretical models could enable a systematic and (ideally) reproducible means of analysing and synthesizing the qualities of textbooks, with a special emphasis on tasks?

Of course, analysing all tasks in a textbook could be quite time consuming. If indicators of the overall "quality" of a textbook are aimed for, it is natural to select a few topics which are usually considered problematic or challenging in teaching practice. These problematic topics will typically have attracted considerable attention of mathematics education research, so that the analysis of textbooks focusing on them will have a wide range of research literature to draw on. This could be helpful to set up a sharp theoretical model of the mathematical topic itself, understood as a practice and knowledge with which the text may engage the reader, through its explanations, exercises, etc.

The subject of this paper is the analysis of didactical texts with a focus on one or more mathematical topics - as a case, we consider Indonesian textbooks for grade 7, and the area of mathematics at this level which can loosely be referred to as proportion and ratio in arithmetic. Using this case, we propose a new methodological framework to analyse examples and exercises thoroughly. This framework is based on the anthropological theory of the didactic, and especially the notion of praxeology and praxeological reference model (see Barbé, Bosch, Espinoza, & Gascón, 2005).

The structure of the paper is as follows in Section 2, we present a selection of strongly related background literature for our case study, concerning student and teacher practices related to the proportion in arithmetic, textbook analysis at large, and research into textbook treatments of the proportion topic. In section 3, we introduce our theoretical framework for textbook analysis, based on the notion of praxeology of the anthropological theory of the didactic. In Section 4, we present the main result of the paper, namely a praxeological reference model for the topic of proportion, developed for and from a study of three Indonesian textbooks. As a supplement to the theoretical description of the model, illustrated by textbook excerpts, Section 5 contains a discussion of some methodological challenges and principles for applying the model, illustrated by concrete "limit" cases from textbooks. In Section 6, we show how the model may be used to produce a quantitative "profile" of the three textbooks; similar profiles could be made using the same model on other textbooks, possibly with a slight extension of the model. We discuss, in Section 7, this and wider perspectives of our methodology for producing explicit and systematic accounts of mathematical practices shown or elicited by a textbook within a given area.

## Research Background

In this section, we first review some of the main trends and methods available in recent research on mathematics textbooks, focusing on the precision with which topic is analysed. We then consider in more detail two recent studies on the proportion topic.

### Textbooks Analysis

In a special issue of *Textbook Research in Mathematics Education* Fan et al. (2013) note the growth of research on mathematics textbooks during the past six decades; it is no longer a "new" field. Fan (2013, p. 773) considers that, in the wider perspective of improving textbooks or mathematics teaching, "it is only the first step to know what the textbooks look like, for example how a specific topic (e.g. algebra or geometry) is treated in a textbook or different textbooks, or how different types of problems are presented in a textbook or in textbooks in different countries". Indeed, (Fan, 2013, p. 774) also mentions that there seems to be a movement from "textbook analysis" towards "textbook research" which encompasses much wider empirical realms than the textbook itself (we could talk of a movement towards "zooming out"). At the same time, the first step may be far from completed - it concerns analytical research, based on solid methodological tools, on the finer details of the mathematical contents of the books. In fact, this paper begins from the premise that theoretical and methodological tools for such a *higher level* of granularity (that is, "zooming in") must be developed. Our analysis of mathematical contents in textbooks must be based on explicit models of such contents, rather than institutional point of view which is implicitly taken for granted.

As an example of research with this higher level of granularity, we refer to a study by Stylianides (2009) who developed an analytical approach to examine tasks (exercises, problems or activities) in American school textbooks for grade sixth, seven, and eight, considering both algebra, geometry and arithmetic. In this framework, Stylianides used 'providing proof' as one of task category and resulted that none of the exercises in the textbooks ask for "generic" (i.e. formal, "general") proofs, but instead asked students to provide various informal explanations, for instance based on a figure or computation. Stylianides' framework on reasoning and proving also played a significant role in a recent special issue of *International Journal of Educational Research* (2014, pp.63-148), focusing on special section: Reasoning and proving in mathematics textbooks: from elementary to the university level).

These categories are certainly specific to certain modalities of work in mathematics (argumentation, reasoning, proof) but they are completely generic with respect to the mathematical contents - the analysis works the same way for tasks on geometry and algebra (for example) and is largely insensitive to specific features of each of these content areas. In fact, concerning research on specific types of mathematical tasks in textbooks, we agree with González-Martín, Giraldo, and Souto (2013, p. 233) that the existing literature is extremely scarce.

In fact, our methodological approach has similarities to the one employed in the study by González-Martín et al. (2013), especially the use of the notion of praxeology to study tasks in textbooks; but the two methodologies also different, as we shall now explain. These authors investigated the case of the introduction of real numbers in Brazilian textbooks, based on a model which has, at its basis, rather broad classes of tasks for the students, such as $\mathcal{T}$: "Classifying a given number as rational or irrational". The broadness of this and other task classes considered in that paper stems from the multiplicity of techniques that may be used to solve a given task from this class. For example, for a task like deciding whether $5+\sqrt{3}$ is irrational or rational, textbooks provide a specific rule: 'the addition of rational and irrational number is irrational' which works here, if the solver knows that 5 is rational and $\sqrt{3}$ is irrational. The scope of this technique is quite limited (one needs only think of the case $\sqrt{0{,}1}$) and corresponds to a much narrower class of tasks than $\mathcal{T}$. The model still suffices to map out "large classes of tasks" which leads to remarkable characteristics of how the textbooks analysed treat the topic; but it does not exhaust the differences in terms of the precise technical knowledge which each of the books could develop among students. By contrast, our approach aims at classifying types of tasks in the precise sense of "tasks which can be solved by a given technique", and to draw up an explicit, precise model of the techniques.

**Proportion in School Textbooks**

Students' and teachers' work with proportion and ratio (or proportional reasoning) is probably one of the most intensively studied topics in mathematics education research. In an early literature study, Tourniaire and Pulos (1985, p. 181) mention that "proportional reasoning has been the object of many research studies in the last 25 years". The authors give an interesting overview of research done during this period, which was largely dominated by cognitive paradigms of research; they also insist on the difficulty of describing explicitly the structure and boundaries of "proportional reasoning".

Research in the cognitive framework was, and is still, often based on test designs. These are of particular relevance to us because such designs sometimes indicate fairly detailed models of the mathematical components of the topic. For instance, to measure student difficulties with the different proportion type of tasks, (Hilton, Hilton, Dole, & Goos, 2013) designed a two-tier diagnostic instrument to measure the degree to which students' master "proportional reasoning". However, the underlying reference model remains implicit in this and many similar studies: it seems that the authors take for granted that readers share the same idea about proportion or proportional reasoning; instead of definitions, the reader is left with the test instrument which, evidently, consists of examples of tasks, rather than explicit types of tasks described theoretically in terms of techniques. It cannot, thus, be used to classify tasks except if they are very similar to the test items, but it can serve as material for validating a given reference model in terms of whether it can classify the items.

In the literature, we find various useful theoretical distinctions of relevance to the theme of proportion, which have supported our model construction (Section 4). For instance, we note the four different kinds of ratio problems defined by van den Heuvel-Panhuizen (1996, p. 238): finding the ratio, comparing ratios, producing equivalents ratio, and finding the fourth proportional.

Considering textbook analysis, there exists a number of studies of proportion in textbooks based on broad models of students work with proportion. Dole and Shield (2008) developed a list of four "specific curricular content goals". Using these goals, the authors examined the extent to which these goals were pursued in two Australian textbooks. The authors later developed their model and extended the analysis to encompass five textbook series (Shield & Dole, 2013). Tasks and examples appear as illustrative cases of the analysis, but the corresponding content requirements (in terms of techniques) are not analysed.

We have also been inspired by a more fine-grained model, developed by Hersant (2005) for the case of “missing number tasks”. Hersant developed a completely explicit model for the techniques identified in different programmes and corresponding textbooks. In terms of what we present in this paper, her model corresponds to a fine-grained analysis of possible variations of a specific technique (the one called $\tau_6$ in section 5). Finally, Lundberg (2011) also focused on missing value tasks related to direct proportion. The studies of Hersant and Lundberg are based on the anthropological theory of the didactic, as the present paper, but consider only to illustrative cases while our model is used to characterize the arithmetical proportion topic as it appears in an entire textbook (cf. Section 6).

## Theory and Methodology

We now introduce our theoretical framework, based on the Anthropological Theory of the Didactic (ATD), in particular praxeological reference models and the levels of didactic co-determination. On this basis, we introduce the context and methods of the present study.

### Praxeologies

The basic idea of this study is to make full use the notion of *praxeology* from ATD, proposed by Chevallard (1999). Praxeology means *praxis* and *logos*, to indicate that a praxeology is a model of some specific amalgam of human practice and knowledge. Concretely a praxeology is a 4-tuple $(T, \tau, \theta, \Theta)$ where the four letters denote different, but closely related, components of the praxeology. While this notion is described in detail by several authors such as (Chevallard, 1999) and (Barbé et al., 2005) , it is so central to our work that we provide our own description here.

At the basis of a praxeology $(T, \tau, \theta, \Theta)$ we have a *type of tasks T* that is a collection of tasks which can be solved by some *technique* $\tau$. Notice that

$T$ and $\tau$ are in 1-1 correspondence: $T$ consists of the tasks which can be solved by $\tau$. Notice also that the term "task" in ATD simply means something humans can accomplish with a simple action (the technique); in mathematics, it could be some algorithm or other basic method. Since a praxeology is a model, it depends on the purpose of modelling what kind of human action it will be useful or feasible to distinguish as a technique; the theory does not provide any strict definition of what would count as a technique (and thereby, as a type of task). We note here that the main difference between our approach and the uses of ATD for textbook analysis provided by Lundberg (2011) and González-Martín et al. (2013) is the explicit definition of techniques (presented in Section 4), which enable us to work with types of tasks (in the proper sense of ATD, that is, defined by one technique) rather than the informal use of the term type of task as "a collection of tasks with a similar form and content".

In many contexts (certainly those involving mathematical practice) it is essential to be able to describe and justify techniques. This leads to a "discourse about the technique" which is the element $\theta$ in the praxeology. Because $\theta$ represents "logos about techniques", it is called a *technology* in ATD (not to be confused with every uses of the term). Finally, the "practical discourse" of how to do task (the technology) is complemented by a discourse about the technology itself, the *theory* $\Theta$. This discourse allows us to challenge, combine and explain the practical discourse independently from specific techniques; for instance, the problem of solving polynomial equations can be discussed at a theoretical level through definitions and existence theorems, and this discourse can then serve to relate, compare, explain and validate concrete techniques for solving more specific kinds of polynomial equations.

A *reference praxeological model* for some human activity is then simply an explicit description of praxeological elements $(T, \tau, \theta, \Theta)$ which we use as a reference for analysing the activity. The model can be more more or less detailed according to the purposes of our analysis.

## Levels of Didactic Co-Determination

The study of textbooks is full of indications of institutionally stable ways of organising the practice and knowledge which the books aim to engage the students with. First, the textbook will usually indicate the school type and age level it is meant for, as well as the discipline - for instance, one the textbooks analysed in our study has the full title (in English translation): “Mathematics 1: concepts and applications for grade 7, SMP/MTs”. Here, SMP/MTs denote two kinds of junior high school in the Indonesian school system, “1” refers to the first year in junior high school, and “7” to the grade while counting also the preceding six years in elementary school. “Mathematics” naturally refers to the school subject which, in turn, can be seen to consist of several levels and elements that are apparent in Chapter and Section headings.

ATD provides a hierarchy of explicit *levels of didactic co-determination* to help explicate and examine these “layers” of organising and structuring the teaching of praxeologies in institutions, usually called *schools.* We do not use the whole hierarchy in this paper, but we will need to use the following levels precisely and coherently:

- The *discipline* is here the school subject mathematics (in Indonesian lower secondary school)
- The *domain* within mathematics is “arithmetic” (cf. Section 4). In general, a domain is a larger part of a discipline which unifies a number of different theories.
- A *sector* is defined by a theory, unifying several praxeologies (sometimes called a *regional organisation*). The one considered in this paper is defined in Section 4 and concerns “proportion” of numbers, which appear also in many social practices outside the school.
- A *theme* is defined by a technology and thus unifies related techniques and types of tasks; it is located within a sector. For instance, “ratio and scale” indicates a discourse with the notions “ratio” and “scale” and central tools to describe and justify specific techniques of calculation within the proportion sector.

We notice that besides textbooks, these levels also appear more or less directly in national curricula of many countries, and while “mathematics” is a discipline in schools almost everywhere, the lower levels may display larger variation.

## Our Context

Several factors motivate the special interest of analysing and assessing textbooks for Indonesian schools, for instance:

- The sheer number of students who could, in a given year, be using a textbook (According to Statistic Indonesia (2013) there are 12.125.397 grade 7, 8, 9 students in Indonesia in 2013 ; all are taught in the same language and according to the same national curriculum)
- The fact that only 37% of the teachers who have the required education level (The World Bank, 2011) results in a dependency on textbooks by many Indonesian teachers.

Indonesia has nine years of general, compulsory education (6 years of elementary school for students aged 7-13, and 3 years of lower secondary school for age levels 13-16). All authorised textbooks are made available electronically and can be downloaded at www.bse.go.id.

In the Indonesian curriculum, students are supposed to learn proportion within the arithmetic domain during the first grade of lower secondary school. However, the curriculum does not specify the detailed contents of the sector “proportion”. Thus, one might expect a large variation in how textbooks treat the theme. In this paper we analysed the proportion sector as it appears in the following three textbooks, which are the only textbooks which are both authorized for grade 7 in the year 2014 and digitally available : Nuharini and Wahyuni (2008). The digital (online) access of the three books means that they are widely used. These textbooks were all produced in 2008 at the occasion of a major curriculum reform.

## Methodology

The way to construct and use a praxeological reference model needs further explanation. First, the model is not constructed independently from the material to be analysed, but it is constructed *along with the analysis* and serves, in the end, to make that analysis completely explicit. It should then also be *reproducible* in the sense that the same analysis would be made by other researchers who have familiarized themselves with the model.

Next, to analyse a sector we need to identify what part of the textbook it corresponds to. As Indonesian textbooks follow the national curriculum quite closely, it is easy to identify the parts of the textbooks which correspond to proportion. Then, within these parts of the books, we begin to analyse all *examples* to identify the *techniques* they present students with, and the corresponding types of tasks. The examples give us explicit information about the techniques which students may use when solving exercises. The exercises are then solved and analysed in terms of the types of tasks found in examples; if needed, new types of tasks are added to the model, in order to be able to classify and to describe all exercises precisely and objectively. We emphasize that the reference praxeological model is as much a result as it is a tool of our analysis.

## Praxeological Reference Model for The Sector of Proportion

In accordance with the literature reviewed in Section 2, we consider *proportion* as concerned with numbers and quantities, thus belonging to arithmetic in the broad sense of "calculation with positive real numbers" (possibly with units and occasionally including also zero) in school and other social contexts. We note here that a *quantity* can be seen, abstractly, as a positive real number together with a unit, such as 0, 75 litres or 5 apples. Here, the unit (litre or years) corresponds to some measure that the number "counts". In the domain of *algebra, one* can consider magnitudes as products of numbers and unit symbols, but with the domain of arithmetic, units have to treat with more semantic than syntactic means of control; in particular, operations are done only with numbers, and the questions of units must be handled separately, with reference to the context of measurement.

In our reference model, *proportion* will actually be a *sector* within the *domain* of arithmetic. It is unified by a *theory* that keeps together the two *themes* which the sector consists of; each of the themes has their explicit technology, which in turn unifies and relates the *subjects* within the theme. We first describe the theory level of our model which, in fact, is quite distant from the texts we have analysed, but which is indispensable for the describing and applying the rest of the model (the themes and subjects) with precision. Then, we present two themes that provide types of tasks and techniques in English translation.

**Basics of a Theory of Proportion**

A systematic reference model requires precise notation and terminology. As researchers, we establish this from the basis, in our own terms (while it is be inspired from the literature reviewed above, especially (Miyakawa & Winsløw, 2009), the "principle of detachment" (Barbé et al., 2005) is a main point of ATD, to avoid whole sale assumption of established institutional jargon, or even of ideas and terms that are often taken for granted by scholars.

In the following we designate numbers or quantities by letters ($x$, $y_j$ etc.) to describe a theory which involves *only numbers and quantities* (and only occasional "letters" in their place, in the case of "unknowns" to be determined). In the rest of this section, letters are understood to represent positive real numbers or quantities.

**Definition.** Two pairs $(x_1, x_2)$ and $(y_1, y_2)$ are said to be *proportional* if $x_1 \cdot y_2 = x_2 \cdot y_1$; we write this in short as $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$. More generally, two $n$-tuples $(x_1, \dots, x_n)$ and $(y_1, \dots, y_n)$ are said to be proportional if $(x_i, x_j) \sim (y_i, y_j)$$(\mathrm{x_i}, \mathrm{x_j}) \sim (\mathrm{y_i}, \mathrm{y_j})$ for all $i, j = 1, \dots, n$ ; we then write $(x_1, \dots, x_n) \sim (y_1, \dots, y_n)$.

It is easy to prove that $\sim$ is an equivalence relation on $\mathbb{R}_+^n$ for all $n$ = 2,3, ... (one can make use of P1 below). A number of other useful properties of this relation are listed below, where, for the sake of brevity, we just formulate the results for 2-tuples:

> P1. If we define the internal ratio of a pair $(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2)$ as $\frac{\mathrm{x}_1}{\mathrm{x}_2}$, then $(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) \sim (\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2)$ is logically equivalent to equality of the internal ratios $\frac{\mathrm{x}_1}{\mathrm{x}_2}$ and $\frac{\mathrm{y}_1}{\mathrm{y}_2}$.
>
> P2. Similarly, $(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) \sim (\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2)$ holds if and only if the external ratios $\frac{\mathrm{x}_1}{\mathrm{y}_1}$ and $\frac{\mathrm{x}_2}{\mathrm{y}_2}$ are equal (notice that external ratio concerns two tuples, while internal ratio depends only on one).
>
> P3. If $(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) \sim (\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2)$ and $\mathrm{x}_1 < \mathrm{x}_2$, then $\mathrm{y}_1 < \mathrm{y}_2$.
>
> P4. If $(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) \sim (1, \mathrm{r})$ if and only if $\frac{\mathrm{x}_2}{\mathrm{x}_1} = \mathrm{r}$, that is, if and only if $\mathrm{x}_2 = \mathrm{r} \cdot \mathrm{x}_1$.

We finally note that for 2-tuples $(x_1, x_2)$ and $(y_1, y_2)$, the property $(x_1, x_2) \sim (y_2, y_1)$ is sometimes called *inverse proportion*; when it holds, we say that $(x_1, x_2)$ and $(y_1, y_2)$ are *inverse proportional*. This corresponds to a relation on 2-tuples which, however, is not an equivalence relation (it lacks transitivity); also, it does not have natural generalisation to $n$-tuples. It is, nevertheless, as the definition also shows, closely related to proportion (sometimes called "direct proportion" to distinguish it from inverse proportion).

With this theoretical basis of the sector we can now describe the rest of our reference model, consisting of two themes, each constituted by several types of tasks.

**Theme 1: Ratio and Scale**

Property P4 above deals with the special case of proportion where one of the tuples is of the form $(1, r)$. This case is closely linked to a technology involving *ratio* and *scale*. Both terms refer to the number *r* in P4 (and thus a property of a single pair of numbers); we use *scale* for the special cases where $r$ or 1/*r* is an integer, and ratio for the general case. In any cases, when *r* is a fraction of integers *m*/*n*, the notation *m*:*n* is often used, as in the alternative formulation $x_2 : x_1 = m : n$ of the characteristic property in P4. In Table 1, we present three tasks $(\mathrm{t}_1, \mathrm{t}_2, \mathrm{t}_3)$ that exemplify the three types of tasks in the theme ratio and scale.

In table 1, $\mathrm{t}_1$ and $\mathrm{t}_3$ are tasks that appear in an example in the textbook quoted. Thus, the technique can be read off from the quote.

Table 1.
*Tasks that exemplify the types of tasks in the theme "ration and scale"*

| Task | Text |
|---|---|
| $\mathrm{t}_1$ | The price of eggs was Rp. 10.000,00 per kg. But the price of egg increased 6:5 from the original price. What is the current price of egg per kg?<br>Answer:<br>Current price: original price = 6:5<br>Current price = $\frac{6}{5} \times$ Rp. 10.000,00<br>=Rp. 12.000, - (Nuharini & Wahyuni, 2008, p. 148) |
| $\mathrm{t}_2$ | A mother gives R.p 5.000,00 for pocket money to a kid. $\frac{2}{5}$ of pocket money is used to buy stationery. How much pocket money is left? (Nuharini & Wahyuni, 2008, p. 147) |

| Task | Text |
|---|---|
| $t_3$ | Ali saves Rp. 300.000,00 in the bank and Budi saves Rp. 450.000,00. Determine the ratio of Alis' saving and Budi's saving?<br>Answer:<br>ratio $= \frac{\text{Rp.300.000,00}}{\text{Rp.450.000,00}} = \frac{2}{3}$<br>(Wagiyo et al., 2008, p. 115) |

We found that although $\mathrm{t}_1$ and $\mathrm{t}_2$ look quite similar at first, they are different because the given ratio should be applied differently (multiply or divide) and it is a real point that students should distinguish and choose among those options. The task $\mathrm{t}_3$ is clearly different as the students are asked to compute the ratio. We note that tasks involving scale (as defined above) are not included in the table, and could look as follow (this is an example of a task of the same type as $\mathrm{t}_1$).

> A map has a scale 1: 2.000.000 and distance between A and B on the map is 3,5 cm. Determine the real distance from A to B (Wagiyo et al., 2008, p. 113).

Table 2.
*Types of Task Related to Ratio and Scale*

| Type of task | Technique |
|---|---|
| $\mathrm{T}_1$: Given $x_1$ and $r$, find $x_2$ so that $(x_1, x_2) \sim (1, r)$. | $\tau_1$: $x_2 = r.x_1$ (multiplying by the given ratio) |
| $\mathrm{T}_2$: Given $x_2$ and $r$, find $x_1$ so that $(x_1, x_2) \sim (1, r)$. | $\tau_2$: $x_1 = x_2/r$ (dividing by the given ratio) |
| $\mathrm{T}_3$: Given $x_1$ and $x_2$, find $r$ so that $(x_1, x_2) \sim (1, r)$. | $\tau_3$: $r = x_2 / x_1$ (finding the ratio) |

Based on analysing these and many other tasks occurring in the textbooks, we defined three types of tasks $(\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_3)$, and the corresponding techniques$(\tau_1 - \tau_3)$, as shown in Table 2; the connection between tables 1 and 2 is, naturally, that $\mathrm{t}_i$ is of type $\mathrm{T}_i$ (i=1,2,3).

**Theme 2: Direct and Inverse Proportion**

In theme 1, the tasks really involve only one tuple; the implicit tuple (1, *r*) is either completely identified with one number (the ratio). We now proceed to a theme which is unified by a technology on certain relations between *two* tuples (most often, but not always, 2-tuples); these can either be *directly* or *inversely* proportional; both relations have important and common examples in real life (e.g. s. Here, we identified four types of tasks. As before, we first give characteristic examples for each of them (Table 3).

Table 3.
*Tasks that exemplify the types of tasks in the theme "direct and inverse proportion"*

| Task | Text |
|---|---|
| $t_4$ | The order of numbers in a proportion must be correct. Indicate for each statement if it is false:<br>a. My age: father's age = 4:1<br>b. Population of Jakarta: population of Bandar c. Lampung = 1:10<br>Toni's age: Toni younger brother's age = 3:2<br>(Wagiyo et al., 2008, p. 116) |
| $t_5$ | In Bu Ina's grocery, the price of a package containing 2 kg of sugar is Rp. 9.400,00 and the price of a package containing 5 kg of sugar is Rp. 22.750,00. Which package is cheaper? What would you do to solve that problem?<br>(Wintarti et al., 2008, p. 194) |
| $t_6$ | The price of 2 m fabric is Rp. 45.000,00. How much does 10 m fabric cost?<br>Answer:<br>The price of 2 m fabric is<br>Rp. 45.000,00.<br>So, the price of 1 m fabric is<br>$= \frac{Rp.\ 45.000,00}{2} = Rp. 22.500,00.$<br>Thus, the price of 10 m fabric is:<br>$10 \times \text{Rp.} 22.500,00 = \text{Rp.} 225.000,00$<br>(Wagiyo et al., 2008, p. 120) |

| Task | Text |
|---|---|
| $t_7$ | A package of candies was distributed to 20 children, so that each child receives 10 candies. How many candies would each child receive if the same package of candies were distributed to 50 children?<br>Answer:<br>20 children= 10 candies<br>50 children= n candies<br>Based on inverse proportion, one gets<br>$\frac{20}{50} = \frac{n}{10}$<br>$\Leftrightarrow 50 \times n = 20 \times 10 \Leftrightarrow n = 4$<br>(Wagiyo et al., 2008, p. 124) |

The corresponding types of tasks are shown in Table 4. Notice that the technique $\tau_4$ can be justified by property P3 (proportional tuples have the same order relations).

About direct and inverse proportion, these four types of tasks exhaust almost all exercises and examples in the three textbooks; the exceptions and limit cases are discussed in the next section.

Table 4.

*Types of task related to "direct and inverse proportion"*

| Type of task | Technique |
|---|---|
| $t_4$: Given numbers $a, b$ and given that $x > y$ are relations with $a, b$. Can it be true that $(x, y) \sim (a, b)$? | $\tau_4$: The answer is yes only if $a > b$. |
| $t_5$: Given $(x_1, x_2)$ and $(y_1, y_2)$, compare internal ratios | $\tau_5$: Calculate $\frac{x_1}{x_2}$ and $\frac{y_2}{y_2}$, and compare. |
| $t_6$: Given $(x_1, x_2)$ and $y_1$ find $y_2$ so that $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$ | $\tau_6$: Calculate $y_2 = \frac{x_2 . y_1}{x_1}$. |
| $t_7$: Given $x_1, x_2, y_1$ find $y_2$ such that $(x_1, x_2)$ and $(y_1, y_2)$ are in inverse proportion | $\tau_7$: Calculate $y_2 = \frac{x_1 . y_1}{x_2}$. |

## Methodological Remarks

In this section, we discuss some methodological challenges we encountered with the above model, above all tasks which we found hard or impossible to classify with it. These occur in four main groups.

### Combination with Techniques from Other Sectors

Many exercises contain more than one question and each of these can be a task, or a combination of tasks, in the sense of ATD. In order to relate "old knowledge" with the knowledge taught in a given chapter, exercises may draw on other sectors besides that of the chapter. Specifically, when analysing exercises from a chapter on proportion, some of the techniques required to solve the exercise may come from other sectors and even domains; we then simply disregard this part in our analysis. However, sometimes the two techniques (one from the sector we study, one from without) may be rather difficult to separate, or we need to make strong assumptions to classify the tasks. We found two such cases in the three textbooks: one exercise (Nuharini & Wahyuni, 2008) in which students need to use knowledge about similar triangles (and then solve a task of type $T_1$), another one in which substantial modelling needs to be done from a described situation before one gets to an inverse proportion problem (of type $T_7$). Our model can only be used to account for the proportion part of these exercises.

### Combinations of Two Techniques Can Replace a Third

In some cases, a technique is equivalent to the combination of two other techniques. Here is a typical case of a problem for which both the simple technique and the combination appear quite naturally, taken from an example in a textbook (Table 5). There are three known numbers (3, 24, and 45) and students are asked to find one unknown number. The textbook demonstrates two solutions to the problem above (see Table 6).

Table 5.

*A task with combination of two techniques can replace a third (Nuharini & Wahyuni, 2008, p. 152)*

| |
|---|
| A car needs 3 litres of gasoline to go 24 km. How many kilometres can the car reach with 45 litres of gasoline? |

In the first solution, the authors are using $\tau_3$ to find the ratio. Then, the answer can be found by multiplying the result with the ratio, following $\tau_1$. In the second solution, the technique $\tau_6$ is used. Thus, the simple technique $\tau_6$ is in fact shown to be equivalent to a combination of two techniques $(\tau_3 + \tau_1)$. Both approaches result in the same answer, however, in the first solution, some extra information is produced, namely the distance which the car can run on one litre of gasoline, while this is not asked for in the problem itself. In view of the form of the question (three given numbers, one to be found), we decided to count this task only as belonging to $T_6$ and to treat similar exercises in the same way. Even though students can develop their reasoning by using $\tau_3 + \tau_1$, we have classified this task in $T_6$, based on the simplicity of $\tau_6$ that would make it a more likely choice for students, in comparison to the more complicated one $(\tau_3 + \tau_1)$.

Table 6.

*Two solutions to the same problem (Nuharini & Wahyuni, 2008, p. 152)*

Solution:

**1st approach:**

With 3 liters of gasoline, a car can go 24 km, thus 1 liter gasoline can reach = $\frac{24}{3}$ km = 8 km

The distance that can be reached with 45 liters of gasoline is 45 x 8 km= 360 km

**2nd approach:**

| gasoline | Distance |
|---|---|
| 3 liters | 24 km |
| 45 liters | $x$ |

$x = \frac{45}{3} \times 24\ km = 36\ km$

Thus, the distance that can be reached with 45 liters of gasoline is 360 km

## Combinations of Two Techniques

For other - much rarer - problems, it is necessary to combine two techniques. Table 7 shows an instance, which is based on the same notation as the case considered in Section 5.1.

Table 7.
*A task with combination of two techniques (Wagiyo et al, 2008, p. 123)*

| |
|---|
| Determine : $y{:}z$ . |
| a. $x{:}y = 1{:}2$ and $y{:}z = 3{:}4$ |
| $x{:}y = 2{:}3$ and $y{:}z = 4{:}5$ |

This problem requires that one combine the ratios of two couples which are related to each other because the second element of the first couple is identical to the first element of the second couple. For instance, to solve task 'b', one can first use $\tau_3$ and then $\tau_6$, as follows:

$(2,3)\sim(1,\mathrm{r})$ gives $\mathrm{r} = \frac{3}{2}$ $(\tau_3)$ ;

$\left(\frac{3}{2},\ \mathrm{y}_2\right)\sim(4{,}5)$ gives $\mathrm{y}_2 = \frac{\frac{3}{2}\cdot 5}{4} = \frac{15}{8}$ $(\tau_6)$. So $\mathrm{x}{:}\,\mathrm{y}{:}\,\mathrm{z} = 1{:}\frac{3}{2}{:}\frac{15}{8}$ .

Unlike the case considered in section 5.2, the task cannot be solved directly by one of the simple techniques of the model, so the use of two techniques is actually needed. We classify this problem as containing a task of type $T_3$ and a task of type $T_6$.

## Non-Classified Problems

We now present the result of applying the reference model to the three textbooks. In the parts of the three textbooks that were identified with the sector "Proportion", we found in total 30 tasks located in examples, and 276 tasks located within exercises. For each book, we first classified the tasks that occurred within examples (Table 8) and then the tasks within exercises (Table 9). Most tasks located in exercises are of a type already located in examples; in this case, we classified the task as belonging to that type (with exception of the case mentioned in Section 5.2, where both a simple technique and a combination of techniques were demonstrated in an example).

Table 8.
*Types of tasks in the examples, number of occurrence*

| | $T_1$ | $T_2$ | $T_3$ | $T_4$ | $T_5$ | $T_6$ | $T_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Wagiyo et al (2008) | 1 | 1 | 8 | 0 | 0 | 5 | 1 |
| Wintarti et al (2008) | 1 | 1 | 2 | 0 | 0 | 2 | 0 |
| Nuharini and Wahyuni (2008) | 2 | 0 | 2 | 0 | 0 | 3 | 1 |
| | 4 | 2 | 12 | 0 | 0 | 10 | 2 |

All three textbooks have exercises with tasks that cannot be solved by techniques demonstrated in a worked example within the book (and hence appear in Table 12 but not in Table 11). These tasks tend to be exceptional and some of them gave rise to specific (new) types of tasks in the reference model ($T_4$ and $T_5$).

The most eye catch thing in these two tables is the similar pattern we find in the two textbooks: the sector "proportion" is, essentially, constituted by five types of tasks ($T_1$, $T_2$, $T_3$, $T_6$, and $T_7$) which account for 90% of the examples and 81% of the exercises. These dominant tasks have numerous occurrences in exercises and appear also as examples.

Table 9.
*Types of tasks in the exercises, number of occurrence*

| | $T_1$ | $T_2$ | $T_3$ | $T_4$ | $T_5$ | $T_6$ | $T_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Wagiyo et al (2008) | 14 | 2 | 62 | 4 | 4 | 26 | 18 |
| Wintarti et al (2008) | 11 | 6 | 40 | 0 | 1 | 18 | 9 |
| Nuharini and Wahyuni (2008) | 7 | 8 | 24 | 0 | 0 | 10 | 12 |
| | 32 | 16 | 126 | 4 | 5 | 54 | 39 |

Many Indonesian teachers follow the textbooks closely when structuring and carrying out their teaching. One could therefore expect that these five dominant types of tasks capture most of the "realised" curriculum in Indonesian schools, as far as proportion is concerned. However, in the national curriculum for lower secondary school, there is no detailed discussion on how proportion should be taught and certainly nothing as precise as these types of tasks is even mentioned. Nevertheless, our analysis of textbooks (in this case, three state authorized textbooks used in almost every school) reveals these five types of tasks as a national "profile" of the proportion sector within arithmetic. While this profile cannot be traced to the curriculum, it seems to be well rooted in the didactic tradition of the school institution, which is especially carried and continued by textbooks.

## Discussion

As illustrated by the short quantitative overview of the three textbooks, the praxeological reference model presented in Section 4 can be used to identify five dominant tasks which, together, form the core of the proportion sector in Indonesian school. At the same time, the model allowed us to single out a few exceptional types of tasks which complete the two themes of the sector and adds some autonomy to the student activity which the books can generate. We conjecture that different "exceptional" types of tasks may be found in other Indonesian textbooks (non-authorized, or older) while the five dominant types would probably also dominate there. At any rate, both the similarity and differences in the mathematical core of the textbooks' treatment of the sector appears from a presentation such as given in Table 8 and 9.

In this paper, we have focused on types of tasks and techniques. In other words, we have not analysed corresponding technology or theory presented in the textbooks, which we will consider elsewhere; this will be of particular importance for analyzing the connections with other domains, such as algebra and geometry. Similarly, we have not considered the ecological aspect of proportion, i.e. institutional conditions and constraints of Indonesian school, which are necessary to *explain* (rather than to analyze) the shape of the themes in the present textbooks, or to discuss alternative designs, *raison-d'être* of the themes, etc. Thus, this paper is far from exhausting the potential of textbook analysis based on ATD. However, we claim that such an analysis will have to include, at its basis, an analysis of the granularity and precision demonstrated in this paper, and that our approach shows more generally that such a granularity with respect to the mathematical content of examples and exercises is indeed possible and useful in textbook analysis.

Our main point in this paper was, thus, to give a first demonstration of how the notion of praxeological reference model enables us to analyse the mathematical core of textbooks in a quite objective and detailed way, which could contribute to “common measures” for both comparative and historical studies of how a sector or theme appears in mathematics textbooks. About the practical level of exercises and examples, which is crucial to the mathematical activity it can support among students, teachers can use such a reference model to examine a textbook. For example, a teacher may compare the type tasks found in a textbook to those appearing in national examinations. Also for textbook authors, comprehensive analyses of themes as given in Section 6 may be useful to consider, to develop a more deliberate profile than what can be done by personal experience and more or less arbitrary variation of single types of tasks.

We acknowledge that the methodology proposed here only attends to certain specific aspects of textbooks, while leaving others untouched. It mainly focuses on mathematical themes, not - for instance - on the use of daily life contexts, style of presentation, or connections with other themes. It also does not question the ecology of the textbooks, for instance, the coherence or genesis of the national curriculum, or the conditions under which the textbooks are used in Indonesian schools.

For further research, it is also important to strengthen the reference model by applying it on different textbooks from different contexts (e.g. private textbooks or foreign textbooks). Including a wider array of empirical data, the reference model will not only have to be extended, but will also gain in solidity and use, for instance for comparative purposes. Finally, we currently work on extending the reference model to include themes from other related domains, such as similarity in plane geometry and linearity in algebra. This will enable us to identify actual or potential relations between the three domains, which are naturally important qualities in textbooks - in the absence of establishing explicit links between themes, they will tend to support the “thematic autism” (Barbé et al., 2005) which can be identified as one of the main challenges of school mathematics.

**References**

Barbé, J., Bosch, M., Espinoza, L., & Gascón, J. (2005). Didactic Restrictions on the Teacher's Practice: The Case of Limits of Functions in Spanish High Schools. In C. Laborde, M.-J. Perrin-Glorian & A. Sierpinska (Eds.), *Beyond the Apparent Banality of the Mathematics Classroom* (pp. 235-268): Springer US.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221-265.

Dole, S., & Shield, M. (2008). The capacity of two Australian eighth-grade textbooks for promoting proportional reasoning. *Research in Mathematics Education, 10*(1), 19-35. doi: 10.1080/14794800801915863

Fan, L. (2013). Textbook research as scientific research: towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. *ZDM, 45*(5), 765-777. doi: 10.1007/s11858-013-0530-6

Fan, L., Zhu, Y., & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. *ZDM, 45*(5), 633-646. doi: 10.1007/s11858-013-0539-x

González-Martín, A. S., Giraldo, V., & Souto, A. M. (2013). The introduction of real numbers in secondary education: an institutional analysis of textbooks. *Research in Mathematics Education, 15*(3), 230-248. doi: 10.1080/14794802.2013.803778

Hersant, M. (2005). La proportionnalité dans l'enseignement obligatoire en France, d'hier à aujourd'hui. *Repères IREM*(59), 5-41.

Hilton, A., Hilton, G., Dole, S., & Goos, M. (2013). Development and application of a two-tier diagnostic instrument to assess middle-years students' proportional reasoning. *Mathematics Education Research Journal, 25*(4), 523-545. doi: 10.1007/s13394-013-0083-6

Lundberg, A. (2011). *Proportion in Mathematics Textbooks in Upper Secondary School*. Paper presented at the 7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Rzeszow.

Miyakawa, T., & Winsløw, C. (2009). Didactical designs for students' proportional reasoning: an "open approach" lesson and a "fundamental situation". *Educational Studies in Mathematics, 72*(2), 199-218. doi: 10.1007/s10649-009-9188-y

Nuharini, D., & Wahyuni, T. (2008). *Matematika 1: konsep dan aplikasinya: untuk kelas VII ,SMP/MTs I [Mathematics 1: concept and application for grade 7, junior high school I]* Retrieved from http://bse.kemdikbud.go.id/

Shield, M., & Dole, S. (2013). Assessing the potential of mathematics textbooks to promote deep learning. *Educational Studies in Mathematics*, *82*(2), 183-199. doi: 10.1007/s10649-012-9415-9

Statistic Indonesia. (2013). Percentage of Population Aged 7-24 Years by Sex, School Age Group, and School Participation 1, 2002-2013. *2014*. http://www.bps.go.id/linkTabelStatis/view/id/1533

Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-Proving in School Mathematics Textbooks. *Mathematical Thinking and Learning*, *11*(4), 258-288. doi: 10.1080/10986060903253954

The World Bank. (2011). *Mentransformasi tenaga pendidikan Indonesia [Transforming Indonesian teachers]* Retrieved from http://www.worldbank.org/external/default/WDSContentServer/WDSP/IB/2011/03/07/000333038201103072312 10/Rendered/PDF/537320v20INDON1design1indvol21final.pdf

Tourniaire, F., & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational studies in mathematics*, *16*(2), 181-204. doi: 10.1007/BF02400937

Van den Heuvel-Panhuizen, M. H. A. M. (1996). *Assessment and realistic mathematics education* (Vol. 19). Utrecht University.

Watson, A., & Ohtani, M. (2015). Themes and issues in mathematics education concerning task design: Editorial introduction. In Watson A., Ohtani M. (eds) *Task Design In Mathematics Education* (pp. 3-15). Springer International Publishing.

**Dyana Wijayanti** is lecturer at Sultan Agung Islamic University, Indonesia. She finished her Ph.D in July, 2017 at University of Copenhagen, Denmark.

**Carl Winsløw** is full professor at the University of Copenhagen, Denmark.

**Contact Address:** Direct correspondence concerning this article, should be addressed to the author. Postal address: Department of Mathematics Education Sultan Agung Islamic University Kaligawe Raya Street Km. 4, Semarang, Central Java 50112; PO Box 1054/SM Indonesia **Email**: dyana.wijayanti@unissula.ac.id , winslow@ind.ku.dk

REDIMAT
Journal of Research in Mathematics Education

Hipatia Press
www.hipatiapress.com

Instructions for authors, subscriptions and further details:

http://redimat.hipatiapress.com

# Teaching and Learning Mathematics through Variation.

Itxaso Tellado[1]

1) Universitat de Vic-Universitat Central de Catalunya, Spain.

Date of publication: October 24th, 2017
Edition period: October 2017-February 2018

**To cite this article:** Tellado, I. (2017). Teaching and learning mathematics through variation [Review]. *REDIMAT*, *6*(3), 331-332. doi: 10.4471/redimat.2017.3043

**To link this article:** http://dx.doi.org/10.4471/redimat.2017.3043

*REDIMAT, Vol. 6 No. 3 October 24th 2017 pp. 331-332*

# Review

Huang, R. and Li, Y. (Eds.) (2017). *Teaching and Learning Mathematics through Variation. Confucian Heritage Meets Western Theories*. Rotterdam: Sense Publishers.

El libro que editan Rongjin Huang y Yeping Li es una invitación muy atractiva a considerar el papel que tiene lo que ellos denominan como enseñanza de las matemáticas a través de las variaciones (*Bianshi* o *teaching through variation*). El uso de diversos problemas que presentan variaciones sobre un mismo concepto, o procedimiento, ha sido usado tradicionalmente en las sociedades orientales como método para que los estudiantes aprendan a identificar cuáles son los elementos que no varían del problema, para así saber cómo proceder y poder resolverlos cuando se encuentran ante situaciones similares. Los autores son conscientes que los estudiantes chinos acostumbran a obtener mejores resultados que estudiantes de otros países en pruebas estandarizadas como el PISA. En este libro lo que hacen es proponernos una reflexión crítica sobre una forma de enseñar matemáticas muy extendida en los países orientales, que quizás hunde sus raíces en la tradición que podemos encontrar en los *Jiǔzhāng Suànshù* (*Los Nueve Capítulos sobre el Arte Matemático*), una obra ancestral que recopila el trabajo de varias generaciones de escribas que ofrecen problemas concretos para hallar métodos generales de resolución de problemas y en el pensamiento (o la manera de hacer) de Confucio, que los autores citan en una de las máximas del pensador chino, cuando dice que "*I do not open up the truth to one who is not eager to get knowledge, nor help out any one who is not anxious to explain himself. When I have presented one corner of a subject to any one, and he cannot from it learn the other three, I do not repeat my lesson*" (No le abro la verdad a alguien que no está ansioso por obtener conocimiento, ni a ayudar a nadie que no esté ansioso por explicarse a sí mismo. Cuando he presentado un rincón de un tema a alguien, y él no puede aprender los otros tres, no repito mi lección).

Durante muchos años muchos maestros han usado el método de la enseñanza a través de la variación, poniendo infinidad de problemas a sus alumnos, esperando que a través de ellos fuesen capaces de *ver* la estructura general matemática que se ocultaba a través de la especificidad de cada problema concreto. Todos y todas recordamos llenar hojas y hojas en nuestras libretas cuando estudiábamos para los exámenes de matemáticas. Lo que los autores de este libro proponen es una mirada crítica a este tipo de maneras de hacer, para ver si contienen algo universal, que se pueda extraer como método de enseñanza universalmente válido, que se pueda aplicar e implementar de manera efectiva en el aula de matemáticas, o, por el contrario, ver que es algo tan culturalmente específico, que es imposible su "traslación" hacia otras culturas que no estén asentadas sobre principios confucionistas. Para ellos los diversos autores que participan en este libro explorar libros de texto, sistemas de enseñanza, aproximaciones teóricas, pensando en encontrar invariables que sean extrapolables a otros lugares, o no, y que podamos usar como criterio en la formación profesional del profesorado de matemáticas.

Se trata de una lectura estimulante, sugerente, que da múltiples ejemplos, sobre los que inspirar una reflexión realmente crítica de nuestra tarea dentro de las aulas de matemáticas. Una lectura totalmente recomendable.

Itxaso Tellado, Universitat de Vic-Universitat Central de Catalunya
itxaso.tellado@uvic.cat